U17 Numerische Integration nach Simpson

Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Wert für $\int_{-1}^{2} \left|x^5\right| + 2dx$ mit einer äquidistanten Zerlegung n=6 nach dem Simpson-Verfahren:

   Lösung:
   Anwenden der Simpson-Formel:

$$h = \frac{2-(-1)}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$I = S(6) = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{6} c_i f(x_i) \qquad c = \begin{cases} 1 & i = 0 \text{ oder } i = 6 \\ 2 & i = 2,4 \\ 4 & i = 1,3,5 \end{cases}$$

$$n \in \{2,4,6,8,\ldots\}$$

$$f(x_0) = \left|x_0^5\right| + 2 = \left|(-1)^5\right| + 2 = 3$$

$$f(x_1) = \left|x_1^5\right| + 2 = \left|(-0.5)^5\right| + 2 = 2.03125$$

$$f(x_2) = \left|x_2^5\right| + 2 = \left|(0)^5\right| + 2 = 2$$

$$f(x_3) = \left|x_3^5\right| + 2 = \left|(0.5)^5\right| + 2 = 2.03125$$

$$f(x_4) = \left|x_4^5\right| + 2 = \left|(1)^5\right| + 2 = 3$$

$$f(x_5) = \left|x_5^5\right| + 2 = \left|(1.5)^5\right| + 2 = 9.59375$$

$$f(x_6) = \left|x_6^5\right| + 2 = \left|(2)^5\right| + 2 = 34$$

$$S(6) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4} f(x_i) + f(x_6) \right) =$$

$$= \frac{1}{6}\big(3 + 4(2.03125 + 2.03125 + 9.59375) + 2(2+3) + 34\big) = \underline{\underline{16.9375}}$$

Bemerkung:

$$\int_{-1}^{2} \left|x^5\right| + 2\,dx = \frac{101}{6} = 16.8333\ldots$$

2. Bestimmen Sieden maximalen Fehler der Berechnung in 1.). Kontrollieren Sie Ihre Fehlerrechnung indem Sie mit einer Excel-Tabelle die Berechnung für die Zerlegungen *n*=4, *n*=6, *n*=10 und *n*=100 durchführen.

Lösung:
Zuerst wird aus der Fehlerabschätzung für eine Parabelfläche eine allgemeine Formel für die Abschätzung mit *n* Parabelflächen entwickelt. Anschliessend werden die Zahlen eingesetzt und ausgerechnet.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S(n)\right| \le \frac{n}{2}\frac{(2h)^5}{2880}\max\left|f^{(4)}\right| \qquad \left(\frac{n}{2}\text{Parabelflächen mit Breite 2h}\right)$$

$$h = \frac{(b-a)}{n} \qquad \to n = \frac{(b-a)}{h}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S(n)\right| \le \frac{\frac{(b-a)}{h}}{2}\frac{2^5 h^5}{2880}\max\left|f^{(4)}\right| = \underline{\frac{(b-a)\cdot 2^4\cdot h^4}{2880}\max\left|f^{(4)}\right|}$$

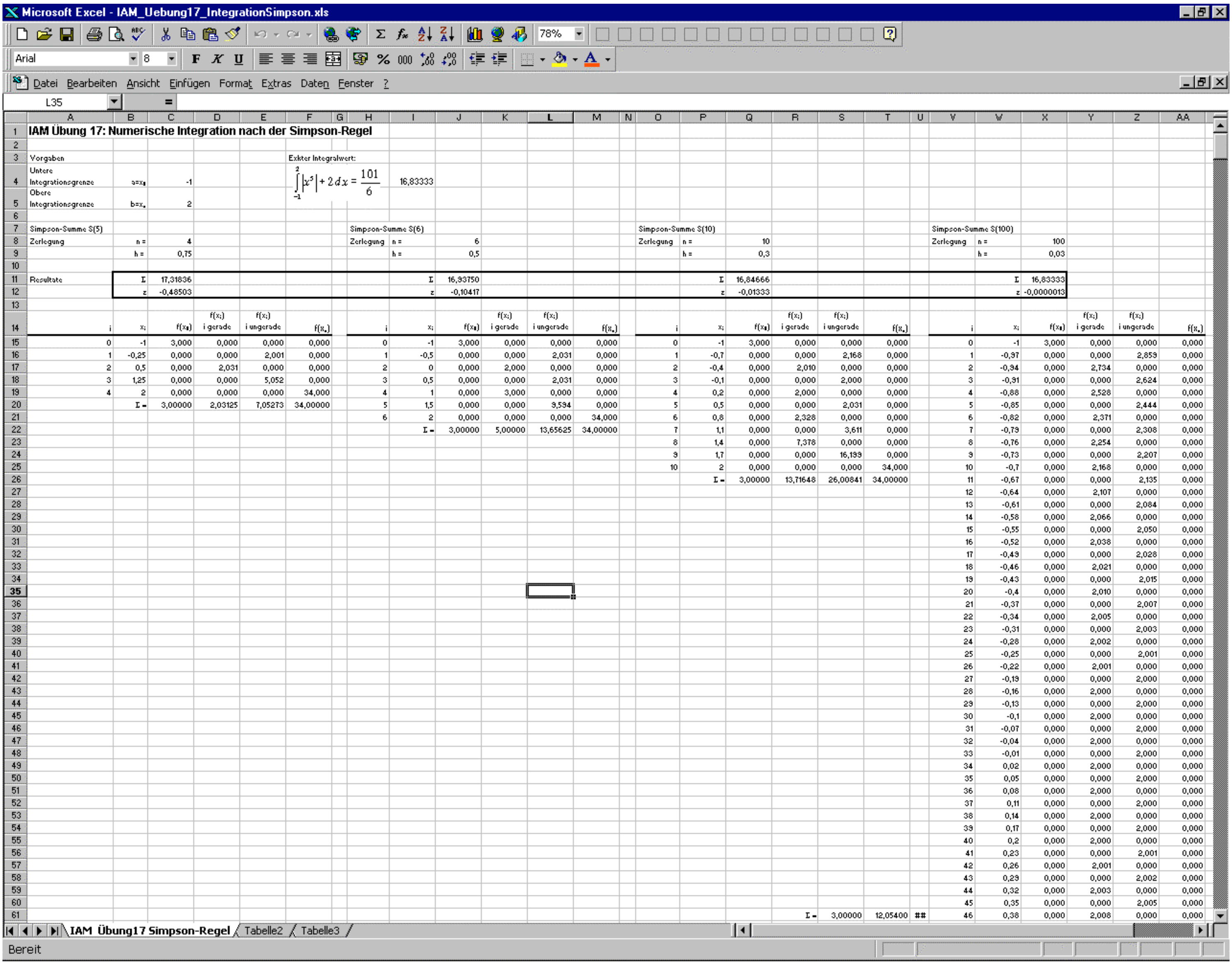
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\left|x^5\right|+2\right) = 5x^4\cdot\operatorname{sgn}(x) \qquad (x \notin 0)$$

…

$$f^{(4)}(x) = 120x\cdot\operatorname{sgn}(x) \qquad (x \notin 0)$$

$$\max\left|f^{(4)}\right| = \max_{x\in[-1,2]\backslash 0}\left|f^{(4)}(x)\right| = 240$$

$$|\varepsilon| \le \underline{\frac{(b-a)\cdot 2^4\cdot h^4}{2880}\max\left|f^{(4)}\right|} = \frac{(2-(-1))\cdot 16\cdot 0.0625}{2880}240 = \underline{\underline{0.25}}$$



IAM Übung 17: Numerische Integration nach der Simpson-Regel

Vorgaben		
Untere Integrationsgrenze	$a=x_0$	-1
Obere Integrationsgrenze	$b=x_n$	2

Exakter Integralwert: $\int_{-1}^{2} \left|x^5\right| + 2\,dx = \frac{101}{6}$ 16,83333

Simpson-Summe S(5)

Zerlegung	n =	4
	h =	0,75
Resultate	I	17,31836
	z	-0,48503

i	x_i	$f(x_0)$	$f(x_i)$ i gerade	$f(x_i)$ i ungerade	$f(x_n)$
0	-1	3,000	0,000	0,000	0,000
1	-0,25	0,000	0,000	2,001	0,000
2	0,5	0,000	2,031	0,000	0,000
3	1,25	0,000	0,000	5,052	0,000
4	2	0,000	0,000	0,000	34,000
	Σ =	3,00000	2,03125	7,05273	34,00000

Simpson-Summe S(6)

Zerlegung	n =	6
	h =	0,5
	I	16,93750
	z	-0,10417

i	x_i	$f(x_0)$	$f(x_i)$ i gerade	$f(x_i)$ i ungerade	$f(x_n)$
0	-1	3,000	0,000	0,000	0,000
1	-0,5	0,000	0,000	2,031	0,000
2	0	0,000	2,000	0,000	0,000
3	0,5	0,000	0,000	2,031	0,000
4	1	0,000	3,000	0,000	0,000
5	1,5	0,000	0,000	9,594	0,000
6	2	0,000	0,000	0,000	34,000
	Σ =	3,00000	5,00000	13,65625	34,00000

Simpson-Summe S(10)

Zerlegung	n =	10
	h =	0,3
	I	16,84666
	z	-0,01333

i	x_i	$f(x_0)$	$f(x_i)$ i gerade	$f(x_i)$ i ungerade	$f(x_n)$	
0	-1	3,000	0,000	0,000	0,000	
1	-0,7	0,000	0,000	2,168	0,000	
2	-0,4	0,000	2,010	0,000	0,000	
3	-0,1	0,000	0,000	2,000	0,000	
4	0,2	0,000	2,000	0,000	0,000	
5	0,5	0,000	0,000	2,031	0,000	
6	0,8	0,000	2,328	0,000	0,000	
7	1,1	0,000	0,000	3,611	0,000	
8	1,4	0,000	7,378	0,000	0,000	
9	1,7	0,000	0,000	16,199	0,000	
10	2	0,000	0,000	0,000	34,000	
	Σ =	3,00000	13,71648	26,00841	34,00000	
			Σ =	3,00000	12,05400	##

Simpson-Summe S(100)

Zerlegung	n =	100
	h =	0,03
	I	16,83333
	z	-0,0000013

i	x_i	$f(x_0)$	$f(x_i)$ i gerade	$f(x_i)$ i ungerade	$f(x_n)$
0	-1	3,000	0,000	0,000	0,000
1	-0,97	0,000	0,000	2,859	0,000
2	-0,94	0,000	2,734	0,000	0,000
3	-0,91	0,000	0,000	2,624	0,000
4	-0,88	0,000	2,528	0,000	0,000
5	-0,85	0,000	0,000	2,444	0,000
6	-0,82	0,000	2,371	0,000	0,000
7	-0,79	0,000	0,000	2,308	0,000
8	-0,76	0,000	2,254	0,000	0,000
9	-0,73	0,000	0,000	2,207	0,000
10	-0,7	0,000	2,168	0,000	0,000
11	-0,67	0,000	0,000	2,135	0,000
12	-0,64	0,000	2,107	0,000	0,000
13	-0,61	0,000	0,000	2,084	0,000
14	-0,58	0,000	2,066	0,000	0,000
15	-0,55	0,000	0,000	2,050	0,000
16	-0,52	0,000	2,038	0,000	0,000
17	-0,49	0,000	0,000	2,028	0,000
18	-0,46	0,000	2,021	0,000	0,000
19	-0,43	0,000	0,000	2,015	0,000
20	-0,4	0,000	2,010	0,000	0,000
21	-0,37	0,000	0,000	2,007	0,000
22	-0,34	0,000	2,005	0,000	0,000
23	-0,31	0,000	0,000	2,003	0,000
24	-0,28	0,000	2,002	0,000	0,000
25	-0,25	0,000	0,000	2,001	0,000
26	-0,22	0,000	2,001	0,000	0,000
27	-0,19	0,000	0,000	2,000	0,000
28	-0,16	0,000	2,000	0,000	0,000
29	-0,13	0,000	0,000	2,000	0,000
30	-0,1	0,000	2,000	0,000	0,000
31	-0,07	0,000	0,000	2,000	0,000
32	-0,04	0,000	2,000	0,000	0,000
33	-0,01	0,000	0,000	2,000	0,000
34	0,02	0,000	2,000	0,000	0,000
35	0,05	0,000	0,000	2,000	0,000
36	0,08	0,000	2,000	0,000	0,000
37	0,11	0,000	0,000	2,000	0,000
38	0,14	0,000	2,000	0,000	0,000
39	0,17	0,000	0,000	2,000	0,000
40	0,2	0,000	2,000	0,000	0,000
41	0,23	0,000	0,000	2,001	0,000
42	0,26	0,000	2,001	0,000	0,000
43	0,29	0,000	0,000	2,002	0,000
44	0,32	0,000	2,003	0,000	0,000
45	0,35	0,000	0,000	2,005	0,000
46	0,38	0,000	2,008	0,000	0,000

3. Erstellen Sie ein Programm, das den Wert der standardisierten Normalverteilung

   $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ für einen gegebenen Wert x mit Hilfe der Simpson-Regel bestimmt.

   Verwenden Sie zur Berechnung eine Zerlegung n=20, die 10 Parabelflächen entspricht.

   Die Integrationsfunktion ist als C-Funktion zu entwickeln. Sie wird aus dem Hauptprogramm aufgerufen. Als Argumente werden die Intervallgrenzen und die gewünschte Zerlegung mitgegeben. Der Funktionswert liefert als Resultat das bestimmte Integral zurück.

```
double simpson(double a, double b, int n)
{ ....
  .....
  return Sn;
}
```

   Lösung: Siehe 4.)

4. Erweitern Sie das Programm so, dass eine Tabelle mit Werten der standardisierten Normalverteilung ausgegeben wird. Eine mögliche Ausgabe ist umseitig gezeigt.

Lösung: (Erzeugt die Tabelle, die in der Aufgabenstellung aufgeführt ist.)

```
/* Erstellen einer Tabelle fuer die standardisierte Normalverteilung           (File: IAM_Uebung17_IntegrationSimpson.c)
   indem die Dichtefunktion mit der Simpson-Regel integriert wird.

   Die Anzahl Teilintervalle wird nach Vorgabe mit n=20 gewählt.

   Autor: Gerhard Krucker
   Datum: 30.5.1995, 25.5.1997
   Sprache: MS Visual-C V4.1  (WinNT Console App.)
*/

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>        /* Fuer WinNT _kbhit() */

#define PI 3.14159265359
#define N 20                           /*Anzahl Teilintervalle */

/* Zu integrierende Funktion: e^(-x^2/2) */
double f(double x)
{
   return exp(-x*x/2);
}

/* Integration nach der Trapezregel:
   Parameter: *f  Zeiger auf die zu integrierende Funktion: double f (double x)
              a   Untere Grenze des Integrationsintervalles
              b   Obere  "
              n   Zelegung in gerader Anzahl Teilintervalle
*/
double simpson_int(double f(), double a, double b, int n)
{ double h;           /* Intervallbreite */
  double sg,su;       /* Ungerade und gerade Summen */
  double Sn;          /* Simpson-Summe der Ordnung n als Integralnaeherung */
  int i;
  double x;

  h = (b - a) / n;    /* x-Schrittweite berechnen */
  sg = su = 0.0;
  for (i=1; i <= n-1; i++)    /* Innere Summen berechnen */
    { x = a + i * h;
      if ( i%2 == 0)          /* Index i gerade */
                      sg += f(x);
              else           /* Index i ungerade */
                      su += f(x);
         }
  Sn = (h / 3 )* (f(a) + 2 * sg + 4* su + f(b)); /* Simpson-Regel */

  return Sn;
}

main()
{ double a,b;         /* Anfangs und Endwerte fuer die Tabelle */
  double step;        /* Schrittweite der Tabelle */
  double Sni;         /* Simpson-Summe als Integralnaeherung fuer den i-ten x-Wert */
  double xi;          /* Argument xi */
  double k;           /* Skalierungsfaktor 1/sqrt(2 pi) */
  int z;              /* Anzahl ausgegebener Werte in der Zeile */

  printf("Berechnen der Standard-Normalverteilung in 0.01 Schritten für das Intervall [0..3.99]:\n");
  a = 0.0;             /* Untere Integrationsgrenze */
  b= 3.99;             /* Obere Grenze fuer Tabelle */
  step = 0.01;         /* Schrittweite */
  z=0;                 /* Noch kein Element ausgegeben */
  k=1/sqrt(2*PI);

  printf("          0      1       2       3       4       5       6       7       8       9");
  for (xi=a; xi <= b; xi+=step)   /* Fuer jedes x der Tabelle */
    { if (z % 10 == 0)
        printf ("\n%3.2f  ",xi);    /* Am Anfang der Zeile den x-Wert ausgeben */
      Sni=simpson_int(f,a,xi,N);
      printf("%5.4f ",k * Sni);
      z++;
    }

  while (!_kbhit());
  return 0;
}
```