Mathcad Funktionen für Electronic Engineering

Gerhard Krucker
Zaunackerstrasse 9
CH-3113 Rubigen
krucker@krucker.ch

Ausgabe: 20.05.2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Zweck

Das vorliegende Paket stellt eine Erweiterung für Mathcad 11 dar. Es beinhaltet Funktionen, Einheiten und Dimensionen sowie Konstanten, die im Umfeld der Berechnung elektronischer Schaltungen benötigt werden.

Gegenüber der Vorgängerversion für MathCad2000 wurde die Einheitentabelle für elektrische Einheiten weggelassen. Sie ist mittlerweile integrierter Bestandteil von MathCad 11. Das Paket ist aber um zusätzliche Funktionen ergänzt worden.

Das volliegende Paket wurde nur mit deuschen Version von MathCad11 getestet. Zur Funktionsfähigkeit mit anderen Versionen kann keine Aussage gemacht werden.

Copyright

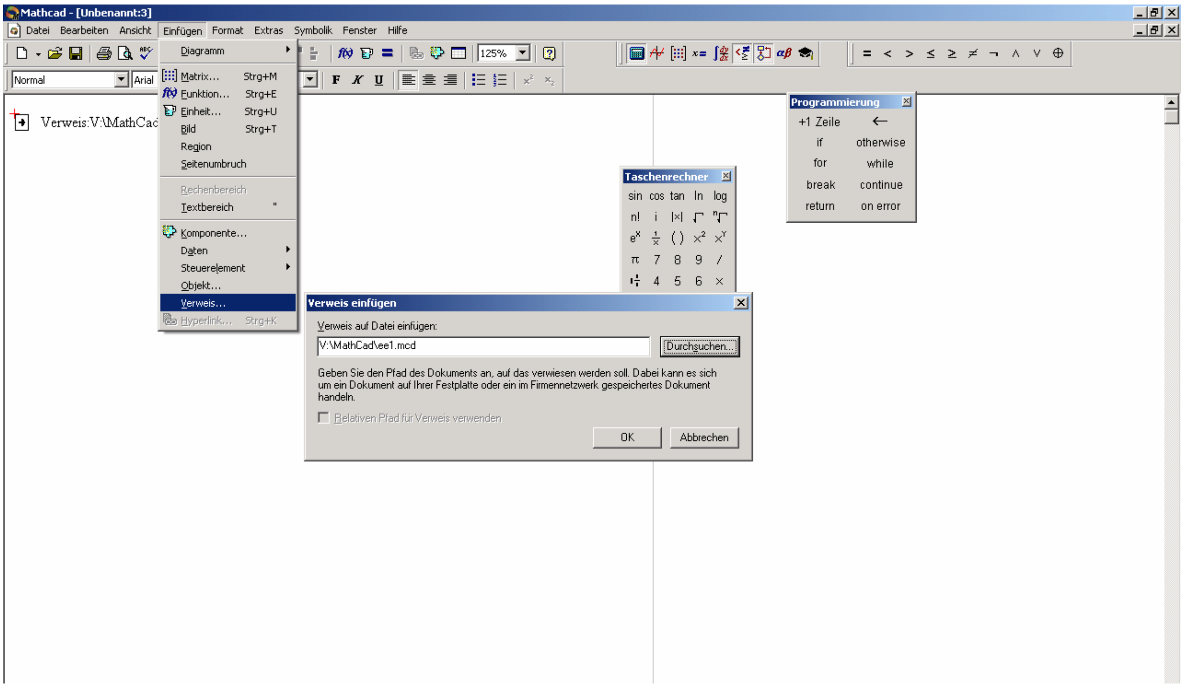
Die Funktionen *linrange(), logrange, phase(), dB(), dB10()* wurden von der Idee her und in Teilen des Codes von *George Chien* der *University of California at Berkeley* mit Dank übernommen.

Installation

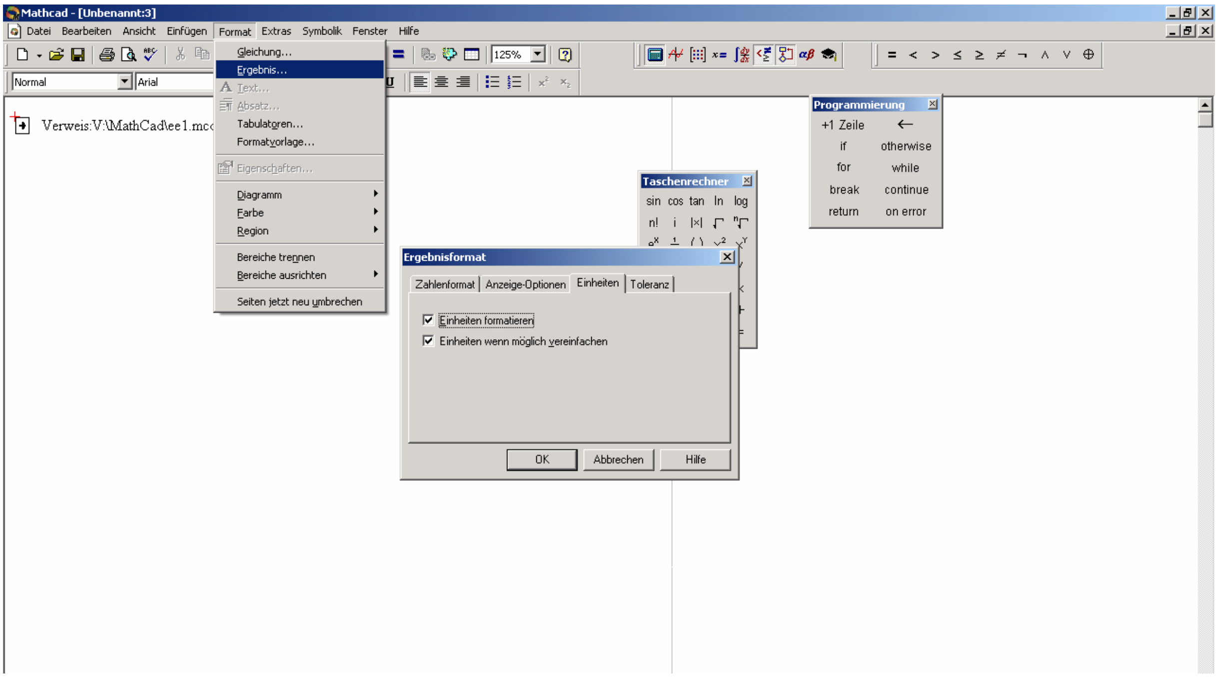
Das File EE1 MCAD11.MCD wird in ein Verzeichnis der Wahl kopiert und in EE1.MCD umbenannt. Ebenso die Dokumentation EE1 MCAD11.PDF. Die Referenzierung im Arbeitsblatt erfolgt über einen Verweis.

Benutzung

Das Paket muss in jedem benutzten Arbeitsblatt mittels Verweis eingefügt werden.



Zur einheitenbehafteten Rechnung sollten SI-Einheiten gewählt werden. Für eine formatierte Ausgabe der Einheiten bedarf es zusätzlich :



Funktionen

normE(Wert,EReihe)

Funktion:
Retourniert den E-normierten Wert, der über den Parameter *Wert* übergeben wurde.

Parameter:
Wert
Zu normierender Wert. Ist die Gösse mit Einheiten behaftet, wird diese an das Resultat weiter gegeben.

EReihe
Zu verwendende E-Normreihe, festgelegt mit symbolischem oder numerischen Wert:

Symbolischer Wert	Numerisches Äquivalent	Wirkung
E0	0	Keine Normung
E1	1	Wert wird nach E1 normiert
E3	2	Wert wird nach E3 normiert
E6	3	Wert wird nach E6 normiert
E12	4	Wert wird nach E12 normiert
E24	5	Wert wird nach E24 normiert
E48	6	Wert wird nach E48 normiert
E96	7	Wert wird nach E96 normiert
E192	8	Wert wird nach E192 normiert

Die Mitte zweier Folgenglieder wird über das geometrische Mittel bestimmt. In der Praxis wird aus Einfachheitsgründen vielfach das arithmetische Mittel benutzt.

Beispiele:

$$\mathrm{normE}(10.2\Omega, E12) = 10 \times 10^{0}\,\Omega$$

$$\mathrm{normE}(31.9nF, E3) = 22 \times 10^{-9}\,F$$

$$\mathrm{normE}(99k\Omega, E12) = 100 \times 10^{3}\,\Omega$$

$$\mathrm{normE}(34m\Omega, E6) = 33 \times 10^{-3}\,\Omega$$

$$\mathrm{normE}(34.23M\Omega, E0) = 34.23 \times 10^{6}\,\Omega$$

$$\mathrm{normE}(34.23M\Omega, 2) = 47 \times 10^{6}\,\Omega$$

Bemerkungen:
Die Bestimmung der Normwerte erfolgt für die Reihen E1 bis E24 mit Tabellen. Die Reihen E48 bis E192 werden als Element der geometrischen Folge mit einer Formel berechnet.

ceilNormE(Wert,EReihe)

Funktion:
Retourniert den nächst grösseren E-Normwert.

Parameter:
Wert
Wert, der auf den nächst grösseren Normwert aufgerundet werden soll. Ist die Gösse mit Einheiten behaftet, wird diese an das Resultat weiter gegeben. Liegt der Wert exakt auf einem Normwert, wird nächst grössere Normwert retourniert.

EReihe
Zu verwendende E-Normreihe, festgelegt mit symbolischem oder numerischen Wert:

Symbolischer Wert	Numerisches Äquivalent	Wirkung
E0	0	Keine Normung
E1	1	Wert wird nach E1 normiert
E3	2	Wert wird nach E3 normiert
E6	3	Wert wird nach E6 normiert
E12	4	Wert wird nach E12 normiert
E24	5	Wert wird nach E24 normiert
E48	6	Wert wird nach E48 normiert
E96	7	Wert wird nach E96 normiert
E192	8	Wert wird nach E192 normiert

Beispiele:

$$\mathrm{ceilNormE}(10.2\Omega, E12) = 12 \times 10^{0}\,\Omega$$

$$\mathrm{ceilNormE}(31.9nF, E3) = 47 \times 10^{-9}\,F$$

$$\mathrm{ceilNormE}(99k\Omega, E12) = 100 \times 10^{3}\,\Omega$$

$$\mathrm{ceilNormE}(34m\Omega, E6) = 47 \times 10^{-3}\,\Omega$$

$$\mathrm{ceilNormE}(34.23M\Omega, E0) = 34.23 \times 10^{6}\,\Omega$$

$$\mathrm{ceilNormE}(34.23M\Omega, 2) = 47 \times 10^{6}\,\Omega$$

$$\mathrm{ceilNormE}(100H, E12) = 120 \times 10^{0}\,H$$

Bemerkungen:
Die Bestimmung der Normwerte erfolgt für die Reihen E1 bis E24 mit Tabellen. Die Reihen E48 bis E192 werden als Element der geometrischen Folge mit einer Formel berechnet.

floorNormE(Wert,EReihe)

Funktion:
Retourniert den nächst kleineren E-Normwert.

Parameter:
Wert
Wert, der auf den nächst kleineren Normwert abgerundet werden soll. Ist die Gösse mit Einheiten behaftet, wird diese an das Resultat weiter gegeben. Liegt der Wert exakt auf einem Normwert, wird nächst kleinere Normwert retourniert.

EReihe
Zu verwendende E-Normreihe, festgelegt mit symbolischem oder numerischen Wert:

Symbolischer Wert	Numerisches Äquivalent	Wirkung
E0	0	Keine Normung
E1	1	Wert wird nach E1 normiert
E3	2	Wert wird nach E3 normiert
E6	3	Wert wird nach E6 normiert
E12	4	Wert wird nach E12 normiert
E24	5	Wert wird nach E24 normiert
E48	6	Wert wird nach E48 normiert
E96	7	Wert wird nach E96 normiert
E192	8	Wert wird nach E192 normiert

Beispiele:

$\mathrm{floorNormE}(10.2\Omega, \mathrm{E12}) = 10 \times 10^{0}\,\Omega$

$\mathrm{floorNormE}(31.9\mathrm{nF}, \mathrm{E3}) = 22 \times 10^{-9}\,\mathrm{F}$

$\mathrm{floorNormE}(99\mathrm{k}\Omega, \mathrm{E12}) = 82 \times 10^{3}\,\Omega$

$\mathrm{floorNormE}(34\mathrm{m}\Omega, \mathrm{E6}) = 33 \times 10^{-3}\,\Omega$

$\mathrm{floorNormE}(34.23\mathrm{M}\Omega, \mathrm{E0}) = 34.23 \times 10^{6}\,\Omega$

$\mathrm{floorNormE}(34.23\mathrm{M}\Omega, 2) = 22 \times 10^{6}\,\Omega$

$\mathrm{floorNormE}(100\mathrm{H}, \mathrm{E12}) = 82 \times 10^{0}\,\mathrm{H}$

Bemerkungen:
Die Bestimmung der Normwerte erfolgt für die Reihen E1 bis E24 mit Tabellen. Die Reihen E48 bis E192 werden als Element der geometrischen Folge mit einer Formel berechnet.

linrange(x_{start},x_{end},N)

Funktion:
Erzeugt einen Vektor mit *N* äquidistant angeordneten Werten zwischen x_{start} und x_{end} .

Parameter:

x_{start}
Startwert = Erstes Element des Vektors

x_{end}
Endwert = Letztes Element des Vektors.

N
Anzahl Elemente im Vektor. Muss ganzzahlig positiv sein.

Implementierung:

$$\mathrm{linrange}(x_{start}, x_{end}, N) := \left| \begin{array}{l} a_{N-1} \leftarrow x_{end} \\ \mathrm{delta} \leftarrow \dfrac{x_{end} - x_{start}}{N-1} \\ \text{for } \ i \in 0..\, N-2 \\ \quad a_i \leftarrow x_{start} + i \cdot \mathrm{delta} \\ a \end{array} \right.$$

Beispiel:

linrange(20, 200, 10) =

	0
0	$20 \cdot 10^0$
1	$40 \cdot 10^0$
2	$60 \cdot 10^0$
3	$80 \cdot 10^0$
4	$100 \cdot 10^0$
5	$120 \cdot 10^0$
6	$140 \cdot 10^0$
7	$160 \cdot 10^0$
8	$180 \cdot 10^0$
9	$200 \cdot 10^0$

Hinweis:
Eine zugehörige Bereichsvariable ii zur Indizierung kann wie folgt definiert werden:

$a := \mathrm{linrange}(20, 20, 10)$ $\qquad$ $ii := 0 .. \mathrm{letzte}(a)$

ii =

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

logrange(x_{start}, x_{end},N)

Funktion:
Erzeugt einen Vektor mit *N* logarithmisch angeordneten Werten zwischen x_{start} und x_{end} .

Parameter:

x_{start}
Startwert = Erstes Element des Vektors

x_{end}
Endwert = Letztes Element des Vektors.

N
Anzahl Elemente im Vektor. Muss ganzzahlig positiv sein.

Implementierung:

$$\text{logrange}(x_{start}, x_{end}, N) := \left| \begin{array}{l} a_{N-1} \leftarrow x_{end} \\ g \leftarrow \sqrt[N-1]{\dfrac{x_{end}}{x_{start}}} \\ \text{for } i \in 0..\, N-2 \\ \quad a_i \leftarrow x_{start} \cdot g^i \\ a \end{array} \right.$$

Beispiele:

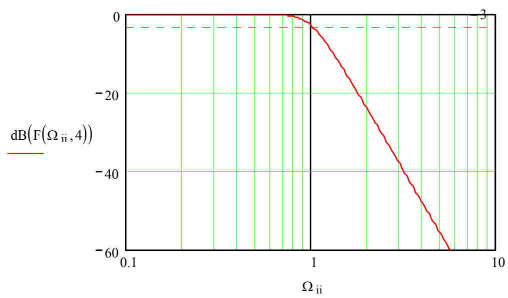
logrange(1Hz, 1kHz, 10) = Hz

	0
0	$1 \cdot 10^0$
1	$2.154 \cdot 10^0$
2	$4.642 \cdot 10^0$
3	$10 \cdot 10^0$
4	$21.544 \cdot 10^0$
5	$46.416 \cdot 10^0$
6	$100 \cdot 10^0$
7	$215.443 \cdot 10^0$
8	$464.159 \cdot 10^0$
9	$1 \cdot 10^3$

$\Omega := \text{logrange}(0.1, 10, 200)$ $\qquad$ $ii := 0..\,\text{letzte}(\Omega)$

$$F(\Omega, n) := \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^{2n}}}$$

Amplitudengang des normierten
ButterworthTiefpass der Ordnung n



dB(v), dB10(v)

Funktion:
Berechnen des Spannungsverhältnis (dB) und Leistungsverhältnis (dB10) in Dezibel.

Parameter:
v
Dimensionslose Spannungs- oder Leistungsverhältniszahl.
Werte $v<10^{-25}$ werden auf –500dB begrenzt. Es wird immer der Betrag von *v* verwendet. Somit ist eine Betragbildung bei negativen oder komplexen Argumenten nicht notwendig.

Implementierung:

$$\mathrm{dB}(v) := \left| \begin{array}{l} p \leftarrow v \cdot \overline{v} \\ -500 \ \text{ if } \ p < 10^{-50} \\ 10 \cdot \log(p) \ \ \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{dB10}(v) := 0.5 \cdot \mathrm{dB}(v)$$

Beispiele:

$$\mathrm{dB}(100) = 40 \times 10^{0}$$

$$\mathrm{dB}(333) = 50.449 \times 10^{0}$$

$$\mathrm{dB}\left(\sqrt{2}\right) = 3.01 \times 10^{0}$$

$$\mathrm{dB}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3.01 \times 10^{0}$$

$$\mathrm{dB10}(100) = 20 \times 10^{0}$$

phase(g)

Funktion:
Berechnung der Phase eines komplexen Vektors *g* in Radian. Das Resultat wird in einem neuen Vektor derselben Grösse retourniert. Unstetigkeitsstellen bei Vielfachen von π werden bei dieser Funktion vermieden.

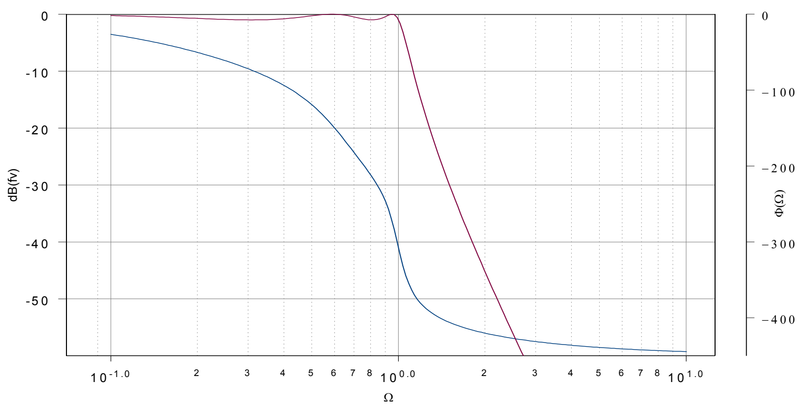
Parameter:
g
Komplexer Vektor mit ≥2 Elementen.

Implementierung:

```
phase(g) := | φ ← arg(g)   (vektorisiert)
            | return g  if letzte(g) < 2
            | wrap ← 0
            | for i ∈ 1.. letzte(g)
            |   | wrap ← wrap − 2·π  if (φ_i − φ_{i−1} + wrap) > 3
            |   | wrap ← wrap + 2·π  if (φ_i − φ_{i−1} + wrap) < −3
            |   | φ_i ← φ_i + wrap
            | return φ
```

Beispiele:
Ein Graph eines Frequenzganges eines Tiefpassfilters kann wie folgt gezeichnet werden. (Tschebyscheff normiert, 5. Ordnung, 1dB Welligkeit):

$S_P := \text{tschebyscheff}(5,1)$		Pole bestimmen
$\Omega := \text{logrange}(0.1, 10, 200)$	$ii := 0..\,\text{letzte}(\Omega)$	(normierte) Frequenzachse
$G(s, S_P) := \dfrac{1}{\prod_{i=0}^{\text{länge}(S_P)-1}\left(1 - \dfrac{s}{{S_P}_i}\right)}$		Übertragungsfunktion
$fv_{ii} := G(j\,\Omega_{ii}, S_P)$		Komplexer Frequenzgang
$F_{ii} := dB(fv_{ii})$	$P := \text{phase}(fv)\cdot\dfrac{180}{\pi}$	Amplituden- und Phasenvektor berechnen



max2(a,b), min2(a,b)

Funktion:
Bestimmen des grösseren Wertes (max) oder kleineren Wertes (min) aus dem Paar a, b.

Parameter:
a,b
Zu vergleichende skalare Werte.

Implementierung:

$$\mathrm{max2}(a,b) := \begin{array}{|l} a \ \text{ if } \ a > b \\ b \ \text{ otherwise} \end{array} \qquad \mathrm{min2}(a,b) := \begin{array}{|l} a \ \text{ if } \ a < b \\ b \ \text{ otherwise} \end{array}$$

Beispiele:

$\mathrm{min2}(3,5) = 3 \times 10^{0}$

$\mathrm{min2}(-3,-5) = -5 \times 10^{0}$

$\mathrm{max}(-1,3) = 3 \times 10^{0}$

$\mathrm{max}(6pF, 1nF) = 1 \times 10^{-9}\,F$

butterworth(n_{TP})

Funktion:
Retourniert die komplexen Pole des normierten Butterworth Tiefpass der Ordnung n_{TP}.

Parameter:
n_{TP}
Ordnung des Tiefpass als positive Ganzzahl ≥1.

Implementierung:

$$\mathrm{butterworth}(n_{TP}) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..n_{TP}-1 \\ \quad S_{P_k} \leftarrow -\sin\left(\dfrac{1+2\cdot k}{2\cdot n_{TP}}\cdot\pi\right) + j\cdot\cos\left(\dfrac{1+2\cdot k}{2\cdot n_{TP}}\cdot\pi\right) \\ \text{return } S_P \end{array} \right.$$

Beispiele:

$$\mathrm{butterworth}(3) = \begin{pmatrix} -500\times 10^{-3} + 866.025j\times 10^{-3} \\ -1\times 10^{0} \\ -500\times 10^{-3} - 866.025j\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{butterworth}(6) = \begin{pmatrix} -258.819\times 10^{-3} + 965.926j\times 10^{-3} \\ -707.107\times 10^{-3} + 707.107j\times 10^{-3} \\ -965.926\times 10^{-3} + 258.819j\times 10^{-3} \\ -965.926\times 10^{-3} - 258.819j\times 10^{-3} \\ -707.107\times 10^{-3} - 707.107j\times 10^{-3} \\ -258.819\times 10^{-3} - 965.926j\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

butterworthPoly(n)

Funktion:
Retourniert die Koeffizienten $b_0..b_n$ des normierten Butterworth-Polynoms $B_n(S)$ der Ordnung n.
$B_n(S)$. *Es* wird zur Bildung der Butterworth-Tiefpassübertragungsfunktion $G(s)$ benutzt.

$$B_n(S) = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 + \cdots + b_n S^n$$
$$G(s) = \frac{1}{B_n(S)}$$

Parameter:
n
Ordnung des Butterworth-Polynoms als positive Ganzzahl ≥1.

Implementierung:

$$\text{butterworthPoly}(n) := \text{zero2poly}(\text{butterworth}(n))$$

Beispiele:

$$\text{butterworthPoly}(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{butterworthPoly}(6) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.8637 \\ 7.4641 \\ 9.14162 \\ 7.4641 \\ 3.8637 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tschebyscheff(n_{TP},A_{rdB})

Funktion:
Retourniert die komplexen Pole des normierten Tschebyscheff Tiefpass der Ordnung n_{TP}. mit Welligkeit A_{rdB} im Durchlassbereich.

Parameter:
n_{TP}
Ordnung des Tiefpass als positive Ganzzahl ≥1.

A_{rdB}
Welligkeit im Durchlassbereich in dB als positive reelle Zahl >0.0

Implementierung:

$$\mathrm{tschebyscheff}(n_{TP}, A_{rdB}) := \left| \begin{array}{l} \varepsilon \leftarrow \sqrt{10^{0.1 \cdot A_{rdB}} - 1} \\ \text{for } k \in 0 .. n_{TP} - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} S_{P_k} \leftarrow -\sin\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n_{TP}} \cdot \mathrm{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \\ S_{P_k} \leftarrow S_{P_k} + j \cdot \cos\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n_{TP}} \cdot \mathrm{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \end{array} \right. \\ \text{return } S_P \end{array} \right.$$

Beispiele:

$$\mathrm{tschebyscheff}(3, 1) = \begin{pmatrix} -247.085\times 10^{-3} + 965.999j\times 10^{-3} \\ -494.171\times 10^{-3} \\ -247.085\times 10^{-3} - 965.999j\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tschebyscheff}(4, 0.01) = \begin{pmatrix} -410.866\times 10^{-3} + 1.356j\times 10^{0} \\ -991.919\times 10^{-3} + 561.478j\times 10^{-3} \\ -991.919\times 10^{-3} - 561.478j\times 10^{-3} \\ -410.866\times 10^{-3} - 1.356j\times 10^{0} \end{pmatrix}$$

invTschebyscheff(n_{TP}, A_{HdB})

Funktion:
Retourniert die komplexen Pole und Nullstellen des normierten inversen Tschebyscheff Tiefpass der Ordnung n_{TP}, und Welligkeit A_{HdB}.

Parameter:
n_{TP}
Ordnung des Tiefpasses als positive Ganzzahl ≥1.

A_{HdB}
Welligkeit im Sperrbereich in dB als positive reelle Zahl >0.0

Resultat:
Die erste Spalte der Matrix beinhaltet die Nullstellen. Die zweite Spalte beinhaltet die Polstellen.

Implementierung:

$$\mathrm{invTschebyscheffPN}(n, A_{HdB}) := \left| \begin{array}{l} \varepsilon \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{10^{0.1\cdot A_{HdB}} - 1}} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} Sp_i \leftarrow \left(-\sin\left(\dfrac{1+2\cdot i}{2\cdot n}\cdot\pi\right)\cdot\sinh\left(\dfrac{1}{n}\cdot\operatorname{arsinh}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right) + i\cdot\cos\left(\dfrac{1+2\cdot i}{2\cdot n}\cdot\pi\right)\cdot\cosh\left(\dfrac{1}{n}\cdot\operatorname{arsinh}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right)\right)^{-1} \\ Sz_i \leftarrow \dfrac{i}{\cos\left(\dfrac{1+2\cdot i}{2\cdot n}\cdot\pi\right)} \end{array}\right. \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} S_{i,0} \leftarrow Sz_i \\ S_{i,1} \leftarrow Sp_i \end{array}\right. \\ \text{return } S \end{array}\right.$$

Beispiele:

$$\mathrm{invTschebyscheffPN}(5, 30) = \begin{pmatrix} 1.051i & -0.162-0.735i \\ 1.701i & -0.622-0.665i \\ 1.633i\times 10^{16} & -1.078 \\ -1.701i & -0.622+0.665i \\ -1.051i & -0.162+0.735i \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{invTschebyscheffPN}(4, 60) = \begin{pmatrix} 1.082i & -0.108-0.274i \\ 2.613i & -0.279-0.121i \\ -2.613i & -0.279+0.121i \\ -1.082i & -0.108+0.274i \end{pmatrix}$$

Bemerkung:
Inverse Tschebyscheff-Tiefpässe ungerader Ordnung haben ein Nullstelle bei unendlich. Sie wird hier als verhältnismässig grosse Zahl angenähert. Die endlichen Nullstellen sind immer rein imaginär.

Referenz:
Inverse Tschebyscheff Tiefpassfilter, G. Krucker 2002,
http://www.krucker.ch/DiverseDok/Papers.html

zero2poly(S_P)

Funktion:
Polynom in Linearfaktordarstellung, definiert durch Nullstellen in Normalform ausmultiplizieren. Das Resultat wird als Koeffizientenvektor p retourniert.

$$(s+S_{P0})(s+S_{P1})\cdots(s+S_{Pn}) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots + p_n s^2$$

Anwendung z.B. bei der Bestimmung der Übertragungsfunktion eines Polynomfilters anhand der berechneten Pole-Nullstellen.

Parameter:
S_P
Vektor mit Nullstellen des Polynoms. Die Dimension des Vektors muss ≥ 1 sein.

Implementierung:
Synthetische Polynommultiplikation.

```
zero2poly(A) := | p0 ← −A0
                | p1 ← 1
                | pdeg ← 1
                | return A  if  länge(A) = 1
                | for  i ∈ 1.. länge(A) − 1
                |   | for  j ∈ pdeg .. 0
                |   |   p_{j+1} ← p_j
                |   | p0 ← 0
                |   | for  j ∈ 0.. pdeg
                |   |   p_j ← p_j − p_{j+1} · A_i
                |   | pdeg ← pdeg + 1
                | return  p
```

Beispiel:
Butterworth-Polynomkoeffizienten der Ordnung 5:

$n := 5$

$Sp := \mathrm{butterworth}(n)$

$$Sp = \begin{pmatrix} -309.017\times 10^{-3} + 951.057j\times 10^{-3} \\ -809.017\times 10^{-3} + 587.785j\times 10^{-3} \\ -1\times 10^{0} \\ -809.017\times 10^{-3} - 587.785j\times 10^{-3} \\ -309.017\times 10^{-3} - 951.057j\times 10^{-3} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{zero2poly}(Sp) = \begin{array}{cc} \text{Koeffizienten} & \text{Potenzen} \\ \begin{pmatrix} 1000\times 10^{-3} \\ 3.236\times 10^{0} \\ 5.236\times 10^{0} \\ 5.236\times 10^{0} \\ 3.236\times 10^{0} \\ 1\times 10^{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} s^0 \\ s^1 \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \end{matrix} \end{array}$$

Interpretation:
Die Übertragungsfunktion eines normierten Butterworth Tiefpassfilters der Ordnung 5 ist daher:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)\left(1-\frac{s}{-0.303+0.951j}\right)\left(1-\frac{s}{-0.303-0.951j}\right)\left(1-\frac{s}{-0.809+0.588j}\right)\left(1-\frac{s}{-0.809-0.588j}\right)}$$
$$= \frac{1}{s^5+3.236s^4+5.236s^3+5.236s^2+3.236s+1}$$

Parameterumrechnung

HE2B(he), HE2C(he), HB2E(hb), HB2C(hb), HC2E(hc), HC2B(hc)

Funktion
Umrechnung der Transistorparameter für andere Grundschaltungen. Das Resultat wird als 2x2-Matrix retourniert.

HE2B(he)	he-Parameter in hb-Parameter umrechnen
HE2C(he)	he-Parameter in hc-Parameter umrechnen
HB2E(he)	hb-Parameter in he-Parameter umrechnen
HB2C(he)	hb-Parameter in hc-Parameter umrechnen
HC2E(he)	hc-Parameter in he-Parameter umrechnen
HC2B(he)	hc-Parameter in hb-Parameter umrechnen

Parameter
Zu wandelnde Transistorparameter in eine 2x2 Matrix der jeweiligen Grundschaltung. Die Parameter müssen einheitenlos sein.

Implementierung

$$\mathrm{HB2E}(hb) := \frac{1}{1 - hb_{1,2} + hb_{2,1} + \left|hb\right|} \cdot \begin{bmatrix} hb_{1,1} & \left|hb\right| - hb_{1,2} \\ -\left(\left|hb\right| + hb_{2,1}\right) & hb_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{HE2B}(he) := \frac{1}{1 - he_{1,2} + he_{2,1} + \left|he\right|} \cdot \begin{bmatrix} he_{1,1} & \left|he\right| - he_{1,2} \\ -\left(\left|he\right| + he_{2,1}\right) & he_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{HE2C}(he) := \begin{bmatrix} he_{1,1} & 1 - he_{1,2} \\ -\left(1 + he_{2,1}\right) & he_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{HC2E}(hc) := \begin{bmatrix} hc_{1,1} & 1 - hc_{1,2} \\ -\left(1 + hc_{2,1}\right) & hc_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{HC2B}(hc) := \frac{1}{\left|hc\right|} \begin{bmatrix} hc_{1,1} & \left|hc\right| + hc_{2,1} \\ -\left(\left|hc\right| - hc_{1,2}\right) & hc_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{HB2C}(hb) := \frac{1}{1 + \left|hb\right| - hb_{1,2} + hb_{2,1}} \cdot \begin{pmatrix} hb_{1,1} & 1 + hb_{2,1} \\ hb_{1,2} - 1 & hb_{2,2} \end{pmatrix}$$

Hinweise
Nach Konvention werden die Matrizen mit den Indizes 1,2 indiziert. Damit das erste Element den Index 1 erhält, muss in Mathcad **ORIGIN≡1** gesetzt werden.
Die Einheiten können nicht direkt in die Matrix eingebracht werden, da Mathcad in Matrizen (anscheinend) nur skalare Komponenten zulässt.

Beispiele

ORIGIN≡ 1

$$he := \begin{pmatrix} 1 \cdot 10^{3} & 2.4 \cdot 10^{-4} \\ 50 & 24 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

hb := HE2B(he)

$$hb = \begin{pmatrix} 19.603\times 10^{0} & 230.535\times 10^{-6} \\ -980.401\times 10^{-3} & 470.48\times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

hc := HE2C(he)

$$hc = \begin{pmatrix} 1\times 10^{3} & 999.76\times 10^{-3} \\ -51\times 10^{0} & 24\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$HC2E(hc) = \begin{pmatrix} 1\times 10^{3} & 240\times 10^{-6} \\ 50\times 10^{0} & 24\times 10^{-6} \end{pmatrix} \qquad HB2E(hb) = \begin{pmatrix} 1\times 10^{3} & 240\times 10^{-6} \\ 50\times 10^{0} & 24\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$HC2B(hc) = \begin{pmatrix} 19.603\times 10^{0} & 230.535\times 10^{-6} \\ -980.401\times 10^{-3} & 470.48\times 10^{-9} \end{pmatrix} \qquad HB2C(hb) = \begin{pmatrix} 1000\times 10^{0} & 999.76\times 10^{-3} \\ -51\times 10^{0} & 24\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

A2C(a), A2C(a), A2G(a), A2H(a), A2Y(a), A2Z(a)

H2A(h), H2C, H2G(h), H2Y(h), H2Z(h)

C2A(c), C2H(c), C2Y(c), C2Z(c)

G2A(g), G2H(g), G2Y(g), G2Z(g)

Y2A(y), Y2C(y), Y2G(y), Y2H(y), Y2Z(y)

Z2A(z), Z2C(z), Z2G(a), Z2H(z), Z2Y(z)

Funktion
Umrechnen der Vierpolmatrizen in andere Parameterformen. Das Resultat wird immer als 2x2 Matrix retourniert.

Parameter
a, h. c, g, y, z
2x2 Matrix mit den umzurechnenden Parameter. Die Parameter müssen einheitenlos sein.

Implementierung
Der Implementierung liegen folgende formalen Zusammenhänge zu Grunde:

A		$\begin{pmatrix}\frac{1}{G_{21}} & \frac{G_{22}}{G_{21}}\\ \frac{G_{11}}{G_{21}} & \frac{\det G}{G_{21}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{-\det H}{H_{21}} & \frac{-H_{11}}{H_{21}}\\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{-1}{H_{21}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}}\\ \frac{-\det Y}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det Z}{Z_{21}}\\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}}\end{pmatrix}$
C, G, H^{-1}	$\begin{pmatrix}\frac{A_{21}}{A_{11}} & \frac{-\det A}{A_{11}}\\ \frac{1}{A_{11}} & \frac{A_{12}}{A_{11}}\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}\frac{H_{22}}{\det H} & \frac{-H_{12}}{\det H}\\ \frac{-H_{21}}{\det H} & \frac{H_{11}}{\det H}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{\det Y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}}\\ \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{Z_{22}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{22}}\\ \frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{\det Z}{Z_{22}}\end{pmatrix}$
H	$\begin{pmatrix}\frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\det A}{A_{22}}\\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{G_{22}}{\det G} & \frac{-G_{12}}{\det G}\\ \frac{-G_{21}}{\det G} & \frac{G_{11}}{\det G}\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}\frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}\\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\det Y}{Y_{11}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{\det Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}}\\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}}\end{pmatrix}$
Y	$\begin{pmatrix}\frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\det A}{A_{12}}\\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{\det G}{G_{22}} & \frac{G_{12}}{G_{22}}\\ \frac{-G_{21}}{G_{22}} & \frac{1}{G_{22}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}}\\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\det H}{H_{11}}\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}\frac{Z_{22}}{\det Z} & \frac{-Z_{12}}{\det Z}\\ \frac{-Z_{21}}{\det Z} & \frac{Z_{11}}{\det Z}\end{pmatrix}$
Z	$\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det A}{A_{21}}\\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{G_{11}} & \frac{-G_{12}}{G_{11}}\\ \frac{C_{21}}{G_{11}} & \frac{\det C}{G_{11}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{\det H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}}\\ \frac{-H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{Y_{22}}{\det Y} & \frac{-Y_{12}}{\det Y}\\ \frac{-Y_{21}}{\det Y} & \frac{Y_{11}}{\det Y}\end{pmatrix}$	

Bemerkung: C, G und H^{-1} Parameter sind identisch.
Referenz: W. Weissgerber, Elektrotechnik für Ingenieure, S. 181, 1991, ISBN 3-528-14918-3

Hinweise
Nach Konvention werden die Matrizen mit den Indizes 1,2 indiziert. Damit das erste Element den Index 1 erhält, muss in Mathcad **ORIGIN≡1** gesetzt werden.

Beispiele

ORIGIN≡ 1

$$h := \begin{pmatrix} 1 \cdot 10^{3} & 2.4 \cdot 10^{-4} \\ 50 & 24 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$H2Z(h) = \begin{pmatrix} 500 \times 10^{0} & 10 \times 10^{0} \\ -2.083 \times 10^{6} & 41.667 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

$$H2A(h) = \begin{pmatrix} -240 \times 10^{-6} & -20 \times 10^{0} \\ -480 \times 10^{-9} & -20 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \qquad A2H(H2A(h)) = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{3} & 240 \times 10^{-6} \\ 50 \times 10^{0} & 24 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Konstanten

Physikalische Konstanten

Elementarladung Elektron	$q_e := 1.6021892 \cdot 10^{-19} \cdot C$	
Boltzmann Konstante	$k_B := 1.380662 \cdot 10^{-23} \cdot J \cdot K^{-1}$	
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c_0 := 2.99792458 \cdot 10^{8} \cdot m \cdot s^{-1}$	
Permeabilität im Vakuum	$\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot H \cdot m^{-1}$	$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} H \cdot m^{-1}$
Dielektrizitätskonstate des Vakkums	$\varepsilon_0 := \mu_0^{-1} \cdot c_0^{-2}$	$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F \cdot m^{-1}$
Plancksche Konstante	$hp := 6.626176 \cdot 10^{-34} \cdot J \cdot s$	
Normfallbeschleunigung	$g := 9.80665 \cdot m \cdot s^{-2}$	
Absoluter Druck	$p_0 := 1.01325 \cdot 10^{5} \cdot Pa$	
Schallgeschwindigkeit bei p_0	$c_{sound} := 331.2 \cdot m \cdot s^{-1}$	
Ruhemasse des Elektrons	$m_e := 9.109534 \cdot 10^{-31} \cdot kg$	
Ruhemasse des Protons	$m_p := 1.6726485 \cdot 10^{-27} \cdot kg$	
Klassischer Elektrononenradius	$r_e := \dfrac{q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m_e \cdot c_0^2}$	$r_e = 2.818 \times 10^{-15} m$

Referenz:
Taschenbuch der Physik, H. Kuchling,Verlag Harry Deutsch 1982, S.659, S.152, S. 322,S.659.

E-Normwerte

Sie beinhalten als Vektor eine vollständige Dekade von [100,1000] Normwerten der E-Reihe:

E-Normreihen E1..E24

$$TabE1 := \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad TabE3 := \begin{pmatrix} 100 \\ 220 \\ 470 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad TabE6 := \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 220 \\ 330 \\ 470 \\ 680 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$TabE12 := \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 150 \\ 180 \\ 220 \\ 270 \\ 330 \\ 390 \\ 470 \\ 560 \\ 680 \\ 820 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad TabE24 := \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 120 \\ 140 \\ 150 \\ 160 \\ 180 \\ 200 \\ 220 \\ 240 \\ 270 \\ 300 \\ 330 \\ 360 \\ 390 \\ 430 \\ 470 \\ 510 \\ 560 \\ 620 \\ 680 \\ 750 \\ 820 \\ 910 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

E-Normreihen E48..E192

TabE48 =

	0
0	$00\cdot10^0$
1	$05\cdot10^0$
2	$10\cdot10^0$
3	$15\cdot10^0$
4	$21\cdot10^0$
5	$27\cdot10^0$
6	$33\cdot10^0$
7	$40\cdot10^0$
8	$47\cdot10^0$
9	$54\cdot10^0$
10	$62\cdot10^0$
11	$69\cdot10^0$
12	$78\cdot10^0$
13	$87\cdot10^0$
14	$96\cdot10^0$
15	$05\cdot10^0$

TabE96 =

	0
0	$00\cdot10^0$
1	$02\cdot10^0$
2	$05\cdot10^0$
3	$07\cdot10^0$
4	$10\cdot10^0$
5	$13\cdot10^0$
6	$15\cdot10^0$
7	$18\cdot10^0$
8	$21\cdot10^0$
9	$24\cdot10^0$
10	$27\cdot10^0$
11	$30\cdot10^0$
12	$33\cdot10^0$
13	$37\cdot10^0$
14	$40\cdot10^0$
15	$43\cdot10^0$

TabE192 =

	0
0	$0\cdot10^0$
1	$1\cdot10^0$
2	$2\cdot10^0$
3	$4\cdot10^0$
4	$5\cdot10^0$
5	$6\cdot10^0$
6	$7\cdot10^0$
7	$9\cdot10^0$
8	$0\cdot10^0$
9	$1\cdot10^0$
10	$3\cdot10^0$
11	$4\cdot10^0$
12	$5\cdot10^0$
13	$7\cdot10^0$
14	$8\cdot10^0$
15	$0\cdot10^0$

Hinweis:

Die Vektoren TabE48..TabE192 zeigen nur die ersten 16 Werte.

Beispiele:

$TabE12_0 = 100 \times 10^0$

$TabE24_{24} = 1 \times 10^3$

$TabE192_{133} = 493 \times 10^0$