# U19DGL Ordnungsreduktion und DGL-Systeme

**Umfeld**

Die numerische Lösung eines Systems von Differentialgleichungen (DGL) beruht auf dem Prinzip, dass in jedem Lösungsschritt jeweils alle DGL behandelt werden. Das heisst das Lösungsverfahren wird auf eine DGL-Vektorfunktion angewandt. Selstverständich müssen für jede einzeleneDGL die Anfangswerte bekannt sein.

$$\underline{y}' = \underline{f}(x,\underline{y}) = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ \cdots \\ f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \end{pmatrix}$$

$$\text{Euler}-\text{Verfahren:}$$

$$\underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + h\underline{f}(x,\underline{y}) \qquad (h\text{:Schrittweite})$$

Mit Hilfe des Ordnungsreduktionsverfahrens können DGL $n$-ter Ordnung durch ein Substitutionsverfahren in ein DGL-System mit $n$ DGL erster Ordnung umgeformt werden:

| Substitution: | Resultierendes DGL – System | Bsp: $y'' = 2xy - y'x^2$ |
|---|---|---|
| $y = z_1$ | | |
| $y' = z'_1 = z_2$ | $z_1' = y' = z_2$ | $z'_1 = z_2$ |
| $y'' = z'_2 = z_3$ | $z_2' = y'' = z_3$ | $z'_2 = 2xz_1 - z_2x^2$ |
| $y''' = z'_3 = z_4$ | $z_3' = y''' = z_4$ | |
| $\cdots$ | $\cdots$ | |
| $y^{(n)} = z'_n$ | $z'_n = y^{(n)} = f(x,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})$ | |

**Aufgaben**

Z.Z: a.) Handrechnung der ersten beiden Schritte.
b.) Tabellierte Lösungsfunktion und den Graphen fürdas Lösungsintervall mit Excel .

1. Lösen Sie das DGL-System mit dem Verfahren von Euler:

$$y'_1 = 2xy_1 + 3 \qquad x \in [0,1], h = 0.1$$
$$y'_2 = \cos(x+2)\sin(y_1) \qquad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$$

Kontrolle: Die Rückseite zeigt die numerische Lösung mit Mathematica.

2. Lösen Sie folgende DGL mit einem Taylorreihenverfahren 3.Ordnung:

$$y' = 3x^2y + 2y - 10x + 5 \qquad x \in [0,2], h = 0.1 \qquad y(0) = 1$$

3. Lösen Sie mit Hilfe einer Ordnungsreduktion und dem Verfahren von Euler:

$$y'''(x) = 2\cos^2(x) + 1$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \qquad x \in [0,1], h = 0.1$$

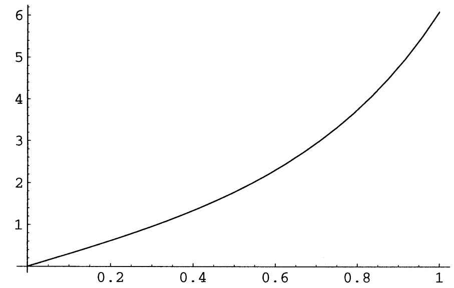
4. Wie gross wird der maximale Fehler aus 3.) wenn die allgemeine analytische Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$y(x) = \frac{1}{24}\left(8x^3 - 3\sin(2x)\right) + c_1 + c_2x + c_3x^2 ?$$

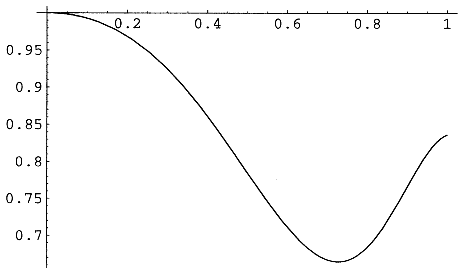
## Zu 1.)

```
In[192]:= Clear[y, y1, y2]
           r = NDSolve[{y1'[x] == 2 x y1[x] + 3,
                 y2'[x] == Cos[x + 2] Sin[y1[x]],
                 y1[0] == 0,
                 y2[0] == 1}, {y1[x], y2[x]}, {x, 0, 1}]
          ny1[x_] = y1[x] /. %[[1, 1]];
          ny2[x_] = y2[x] /. %[[1, 2]];
          Plot[ny1[x], {x, 0, 1}]
          Plot[ny2[x], {x, 0, 1}]

Out[193]= {{y1[x] → InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][x],
            y2[x] → InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][x]}}
```



```
Out[194]= - Graphics -
```



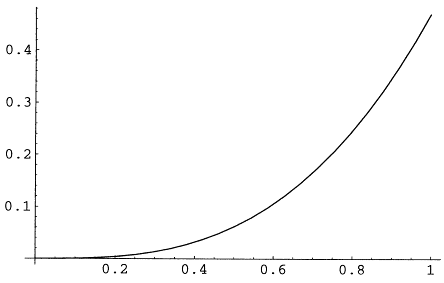
```
Out[195]= - Graphics -
```

## Zu 3.)

```
In[8]:= Clear[y, x];
        NDSolve[ {y'''[x] == 2 Cos[x]^2 + 1, y[0] == 0, y'[0] == 0, y''[0] == 0}, y[x], {x, 0, 1}]
        ny[x_] = y[x] /. %[[1]]
         Plot[ny[x], {x, 0, 1}]

Out[8]= {{y[x] → InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][x]}}

Out[9]= InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][x]
```



```
Out[10]= - Graphics -
```