

1 Iterative Bestimmung der Gleichrichterdaten

Die bisher gezeigten Formeln zur vereinfachten Gleichrichterberechnung beruhen auf der Annahme, dass der Stromflusswinkel $2\alpha \approx 75^\circ$ ist. Ebenso wird der Spannungsabfall über der Diode nicht berücksichtigt.

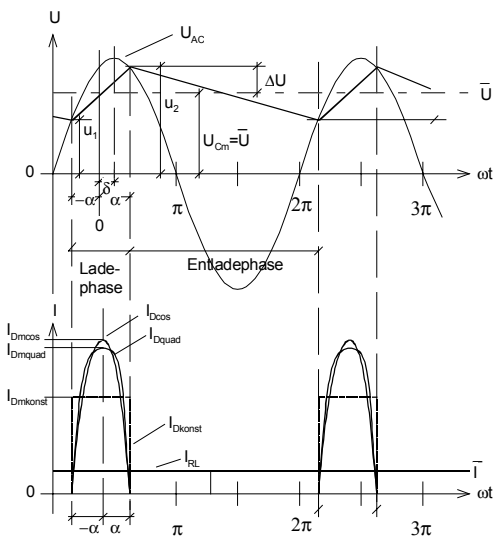
Mit Hilfe eines iterativen Ansatzes können die Berechnungen wesentlich verbessert werden. Wir betrachten das Vorgehen exemplarisch am Einweggleichrichter. Die Methode kann analog auf die anderen Schaltungstypen angewandt werden.

Ziel ist das Erarbeiten einer programmierten Lösung in C zur Bestimmung von Stromflusswinkel, Welligkeit, Diodenspitzenstrom und Mittelwert der Ausgangsspannung.

Die nachfolgenden Ausführungen untersuchen primär verschiedene Möglichkeiten der näherungsweisen Beschreibung des Diodenstromes. Für die Herleitungen der Formeln zur Brummspannung, Effektivwert des Transformatorstromes und Ausgangsspannung sei auf das Skript [KRU97] verwiesen.

1.1 Theoretischer Ansatz

Wir gehen vom linearisierten Spannungsmodell nach [KAM57] aus. Die Spannungsverläufe am Kondensator werden mittels Geraden dargestellt. Der Stromverlauf wird ebenfalls als Gerade für den Mittelwert dargestellt:



Vereinfachte Darstellung des Spannungsverlaufes, indem die Spannung am Kondensator mit Geraden dargestellt wird.

Der Diodenstrom kann fallweise über eine konstante, quadratische oder cos-Funktion angenähert werden.

Der Diodenstrom kann ebenfalls vereinfacht dargestellt werden. Hierzu sind mehrere Möglichkeiten denkbar:

- Konstanter Strom $I_{Dmkonst}$ während des Stromflusswinkels 2α
- Quadratischer Stromfluss mit Stromspitze I_{Dmquad}
- Cosinusförmiger Stromfluss mit Stromspitze I_{Dmcos}

Sinnvoll für die Praxis sind die beiden letzteren Funktionen. Lediglich diese zeigen eine ausgeprägte Stromspitze. Alle nachfolgenden Betrachtungen vereinfachen wir, indem der Unsymmetriewinkel $\delta=0$ gesetzt wird. Dieser Sachverhalt ist bei vernünftig dimensionierten Gleichrichterschaltungen durchaus zulässig.

(„Vernünftig“, heisst: R_i ist klein bezüglich R_L , C_L ist gross bezüglich des Ausgangsstromes I_{RLm} .)

1.2 Modellierung des Diodenstromes

1.2.1 Konstantes Modell

Aus Gründen der Energieerhaltung müssen die eingeschlossenen Flächen für den Diodenstrom I_D und I_{RL} über eine Periode gleich gross sein. Daher gilt für die verschiedenen Modelle:

$$I_{Dm} = \frac{\bar{I} \cdot 2\pi}{2\alpha}$$

I_{Dm} : Spitzenwert des linearisierten Diodenstromes
 2α : Stromflusswinkel [rad]
 \bar{I} : Mittelwert des Ausgangsstromes

1.2.2 Quadratisches Modell:

Für die Praxis ist ein konstanter Diodenstrom unrealistisch, da die charakteristische Stromspitze fehlt. Wir beschreiben deshalb den Strom parabelförmig.

Formal wird das Interpolationspolynom, das durch die Punkte $(-\alpha, 0)$, $(0, I_{Dpmax})$ und $(\alpha, 0)$ läuft:

$$P(\omega t) = I_{Dp} - \frac{I_{Dp}}{\alpha^2} (\omega t)^2$$

Da auch hier Flächengleichheit vorausgesetzt wird, können wir den Spitzenwert des I_{Dp} bestimmen, indem wir die Polynomfläche der Rechteckfläche gleichsetzen:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} I_{Dm} d(\omega t) = 2\alpha I_{Dm}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} I_{Dp} - \frac{I_{Dp}}{\alpha^2} (\omega t)^2 d(\omega t) = \frac{4}{3} \alpha I_{Dp}$$

$$2\alpha I_{Dm} = \frac{4}{3} \alpha I_{Dp} \quad \rightarrow \quad I_{Dp} = \frac{3}{2} I_{Dm}$$

Der Spitzenwert I_{Dp} ist also grundsätzlich 1.5 mal höher als wenn ein konstanter Diodenstrom I_{Dm} über den Stromflusswinkel 2α fließen würde. Trotz des recht groben Ansatzes bestätigt sich dieser Faktor recht genau im Vergleich mit Computersimulationen und Messwerten. Die relativen Abweichungen für I_{Dp} liegen im Prozentbereich.

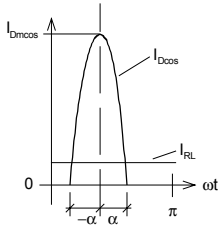
Bezüglich des Ausgangsstromes wird der Spitzenwert des Diodenstromes I_{Dp} näherungsweise:

$$I_{Dp} = \frac{3 \bar{I} 2\pi}{2 \cdot 2\alpha} = \frac{3\pi \bar{I}}{2\alpha}$$

1.1.3 Cosinus-Modell:

Alternativ kann der Stromfluss auch mit einer cos-Funktion vereinfacht dargestellt werden. Der Diodenstrom wird als cos-Halbwellen über den Ladezyklus formuliert:

$$I_{Dcos}(\omega t) = I_{Dmcos} \cos\left(\frac{\omega t}{2\alpha}\right)$$



Auch hier gilt die ausgeglichene Ladungsbilanz, d.h. alles was über den Lastwiderstand R_L während der gesamten Periode 2π abfließt, muss während des Stromflusswinkels $-\alpha, \dots, +\alpha$ zugeführt werden. Durch Auflösen der Integrale können wir den Spitzenstrom I_{Dmcos} bestimmen:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} I_{Dmcos} \cos\left(\frac{\omega t}{2\alpha}\right) d(\omega t) = \int_0^{2\pi} \bar{I} d(\omega t)$$

$$\rightarrow I_{Dmcos} = \frac{\pi^2 \bar{I}}{2\alpha}$$

Der Spitzenstrom dieser Näherung ist etwas höher als im quadratischen Fall. Für die Iteration wird nachher diese Form verwendet.

1.3 Bestimmung des Stromflusswinkels

Der Stromflusswinkel 2α wird bei bekannten Spannungen U_{AC} , U_F und U_L im linearisierten Modell:

$$2\alpha = 2 \arccos\left(\frac{U_L + U_F}{U_{AC}}\right)$$

U_{AC} : Spitzenwert der Transformatorspannung

U_L : Mittelwert der Ausgangsspannung

U_F : Spannungsabfall über der Diode im Durchlassbetrieb

1.4 Bestimmung der Brummspannung

Die Brummspannung hängt stark vom Stromflusswinkel und Unsymmetriewinkel ab. Ist der Ladekondensator unendlich gross, so wird der Unsymmetriewinkel $\delta = 0$. In der Tat ist der Unsymmetriewinkel δ meist recht klein ($< 5^\circ$), so dass die Brummspannung praktisch nur vom Stromflusswinkel 2α abhängig ist.

Die Brummspannung wird nach [KRU97]:

$$U_{Brss} = \frac{\bar{I} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)}{k f C} \approx \frac{0.8 \cdot I_{RLm}}{k f C}$$

α : $\frac{1}{2}$ Stromflusswinkel [rad]

$k = 1$ (Einweg)

$k = 2$ (Zweiweg)

Bemerkenswert ist, dass die Brummspannung praktisch nur vom Ladekondensator und dem Laststrom abhängig ist. Dies gilt, solange der Stromflusswinkel ausreichend klein ist. In der Praxis ist unter Last mit Stromflusswinkeln $2\alpha = 10^\circ \dots 120^\circ$ zu rechnen.

Praxishinweis:

Zu beachten ist, dass bei zu knapp dimensioniertem Transformator (R_i ist wesentlich) trotz grossen Ladekondensatoren keine befriedigenden Brummspannungen erreicht werden. Unter Last erscheint dann die Brummspannung zu gross und der Spannungsmittelwert zu klein. Charakteristisch: Bei einer

relativ grossen Brummspannung bringt auch eine starke Vergrößerung des Ladekondensators keine spürbare Erhöhung des Spannungsmittelwertes. Grund: I_{Dmax} müsste bei kleinerem Stromflusswinkel ansteigen, dies kann er aber nicht, weil R_i des Transformators zu gross ist.

1.5 Formelsatz

Die für die Berechnung notwendigen Formeln sind hier nochmals als Formelsatz zusammengestellt:

$$I_{Dm} = \frac{\pi^2 \bar{I}}{2\alpha} \quad I_{Dm}: \text{Spitzenwert des Diodenstroms (Cosinus - Modell) [A]}$$

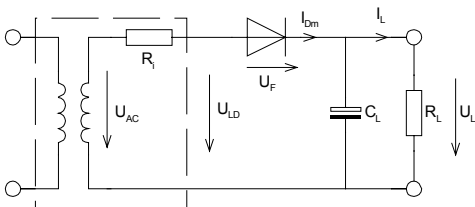
$$\alpha = \arccos\left(\frac{U_L + U_F}{U_{ACs}}\right) \quad \begin{array}{l} U_{AC}: \text{Spitzenwert der Transformatorspannung [V]} \\ U_L: \text{Mittelwert der Ausgangsspannung [V]} \\ U_F: \text{Spannungsabfall über der Diode im Durchlassbetrieb [V]} \end{array}$$

$$U_{Brss} = \frac{\bar{I} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)}{k f C} \quad \begin{array}{l} \alpha: \frac{1}{2} \text{ Stromflusswinkel [rad]} \\ k: \text{Anzahl Ladezyklen pro Periode []} \end{array}$$

$$\bar{U} = \hat{U}_{ACs} \cos \alpha$$

1.6 Iteration

Aus den vorgegebenen Grössen für den Transformator (U_{AC} , R_i) und Diode (U_F) und der Last R_L wird iterativ die mittlere Ausgangsspannung bestimmt.



Für die Iteration treffen wir zuerst die wesentliche Vorgabe, dass der Ladekondensator unendlich gross ist. Daher wird formal der Unsymmetriewinkel $\delta=0$, wenn R_i genügend klein ist. Unter diesen Bedingungen sind alle vorher gezeigten Vereinfachungen gültig.

Ungeeignet wird das hier benutzte Verfahren, wenn

$$R_L \cdot C_L < \frac{1}{k f} \quad \begin{array}{l} f: \text{Frequenz der Transformatorspannung} \\ k: \text{Pulszahl} \end{array}$$

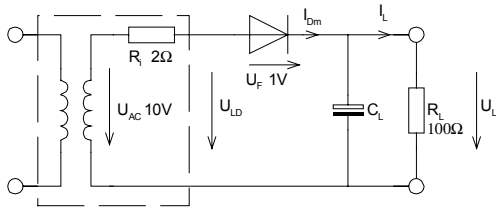
gilt. (D. h. „unvernünftig dimensioniert,, wurde)

Ausgangslage für die Iteration ist eine realistische Schätzung für den Stromflusswinkel. Daraus wird eine Näherung für die Ausgangsspannung bestimmt. Ein sinnvoller Initialwert für 2α liegt bei 75° .

Das weitere Vorgehen betrachten wir an einem Beispiel:

1.6.1 Beispiel:

Iterative Bestimmung der Ausgangsspannung U_L und des Stromflusswinkels 2α :



Iterationsvorbereitung:

$$2\alpha = 75^\circ$$

$$\hat{U}_{AC} = 10V\sqrt{2} = 14.1V$$

$$U_L = \hat{U}_{AC} \cos \alpha = 14.1 \cdot \cos(0.65449) \quad [V] = 11.186V$$

Iterationsschritt:

Der Ausgangsstrom wird aufgrund der bereits bekannten Ausgangsspannung:

$$I_L = \frac{U_L}{R_L} = \frac{11.186}{100} \left[\frac{VA}{V} \right] = 111.86mA$$

Der zugehörige Laststrom und Diodenspitzenstrom werden demnach:

$$I_{Dm} = \frac{\pi^2 \cdot \bar{I}_L}{2\alpha} = \frac{3.1416^2 \cdot 0.11186}{1.309} = 0.8434A$$

Der zugehörige Stromflusswinkel wird:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{U_L + U_F}{\hat{U}_{AC}}\right) = \arccos\left(\frac{11.186 + 1}{14.1}\right) = 0.52713 \quad (30.2^\circ)$$

Dieser Spitzenwert I_{Dp} fällt während des Ladevorganges an. Für die Masche gilt während des Ladevorganges:

$$U_L = \hat{U}_{AC} - I_{Dmax} \cdot R_i - U_F = 14.1 - 0.843 \cdot 2 - 1 \left[V - A \frac{V}{A} - V \right] = 11.413V$$

Den Iterationsschritt wiederholen wir sooft, bis die gewünschte Genauigkeit für U_L erreicht ist.

Zu bemerken ist, dass das Verfahren nicht monoton konvergiert. Ebenso ist bei Extremwerten (sehr kleiner oder grosser Strom) ev. keine Konvergenz möglich.

Mit einer EXCEL-Tabelle erhalten wir die Werte:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Iterative Gleichrichterberechnung									
2										
3	U_{AC} [Veff] =	10								
4	R_i [Ω] =	2								
5	R_L [Ω] =	100								
6										
7	U_F [V] =	1								
8	2α [deg] =	75								
9	U_{ACSS} [V] =	14.1421								
10										
11										
12	Iteration:	I_L [A]	I_{dm} [A]	α [deg]	U_L [V]					
13	Vorgabe			37.5	11.220					
14	1	0.112	0.846	30.224	11.450					
15	2	0.115	1.071	28.314	11.000					
16	3	0.110	1.098	31.950	10.945					
17	4	0.109	0.969	32.365	11.205					
18	5	0.112	0.979	30.343	11.184					
19	6	0.112	1.042	30.507	11.058					
20	7	0.111	1.025	31.503	11.092					
21	8	0.111	0.996	31.233	11.151					
22	9	0.112	1.009	30.772	11.123					
23	10	0.111	1.022	30.992	11.098					
24	11	0.111	1.012	31.189	11.117					
25	12	0.111	1.008	31.040	11.126					
26	13	0.111	1.014	30.966	11.115					
27	14	0.111	1.015	31.056	11.112					
28	15	0.111	1.012	31.077	11.119					
29	16	0.111	1.012	31.027	11.119					
30	17	0.111	1.013	31.025	11.116					
31	18	0.111	1.013	31.051	11.116					
32	19	0.111	1.012	31.048	11.118					
33	20	0.111	1.012	31.035	11.117					
34	21	0.111	1.013	31.039	11.116					
35										

1.7 Entwurf des Berechnungsprogrammes

Auf der Grundlage der theoretischen Zusammenhänge kann das Iterationsverfahren direkt codiert werden. Nachfolgend wird die einfache Umsetzung als Win32 Konsolen-Anwendung gezeigt.

Spezifikationen

System: Win32-Konsolenanwendung. Die Eingaben erfolgen im Dialog in der DOS-Box.

Schnittstellen zum Programm bilden:

Eingaben: Trafospannung [Veff]
 Trafoinnenwiderstand [Ohm]
 Ladekondensator [uF]
 Frequenz [Hz]
 Lastwiderstand [Ohm]
 Dioden-Durchlassspannung [V]

Ausgaben: Jeder Iterationschritt wird mit
 - Stromflusswinkel
 - Diodenspitzenstrom
 - Mittelwert der Spannung über dem Lastwiderstand
 Am Ende der Iteration:
 - Brummspannung [Vss]
 - Trafostrom [Aeff]

Die zugehörige Ablaufstruktur wird:

Eingabedaten interaktiv einlesen
Vorgabewerte: 2a=90 Grad $UACs = UACeff * \sqrt{2}$ $UL = UACs * \cos(a)$ $EPS = 1E-3$
Laststrom bestimmen: $IL = UL / RL$
IDmax bestimmen: $IDmax = PI^2 * IL / (2 * a)$
Ausnahmebehandlung, wenn il, ul zu gross
a bestimmen: $a = \arccos((UL + UF) / UACs)$
Neue UL bestimmen: $UL = UACs - IDmax * Ri - UF$
Werte ausgeben: $UL, IL, IDmax, 2a$
$ UL - UL_{i-1} < EPS$
Brummspannung berechnen und ausgeben: $UBr = (1 - a / PI) * IL / (f * C)$
Trafostrom berechnen und ausgeben: $IACeff = IL * PI / X * \sqrt{PI / 2a}$

Die konkrete Implementierung in C wird:

```

/* Vereinfachte Berechnung der Ausgangsgleichspannung beim Einweggleichrichter.
   Der Spannungsabfall ueber der Diode wird als konstant angenommen.

   Das Programm macht waehrend der Iteration keine Plausibilitaetskontrollen fuer
   die Werte.

   Autor: Gerhard Krucker
   Datum: 3.1.1997
   Version: 1.0
   Sprache: MS Visual C V4.1 (NT Console Application)
   Filename: Gleichrichterberechnung.C
   Zugehoerige Files: Keine
*/

```

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>

#define PI 3.14159
#define EPS_ 1E-3          /* Abbruchkriterium, wenn Ausgangsspannungsdifferenz < EPS */

main()
{
    double ri;           /* Innenwiderstand des Transformators [Ohm] */
    double utr;         /* Trafospaltung unbelastet [Veff] */
    double ud;          /* Spannung ueber der Diode im Durchlassbereich [V] */
    double a;           /* 1/2 Stromflusswinkel [rad,deg] */
    double rl;          /* Wert des Lastwiderstandes [Ohm] */
    double cl;          /* Kapazitaet des Ladekondensators [F,uF] */
    double freq;        /* Frequenz der Transformatorspannung [Hz] */

    double utrs;        /* Spitzenwert der Transformatorspannung [V] */
    double ul;          /* Mittelwert der Spannung an rl [V] */
    double il;          /* Laststrom bezueglich ul [A] */
    double idm;         /* Spitzenstrom durch die Diode bezueglich il [A] */
    double ul_alt;      /* UL vom vorherigen Iterationsschritt [V]*/
    double idmax;       /* Maximaler Diodenstrom, begrenzt durch ri [A] */
    double ubr;         /* Brummspannung in [Vss] */
    double ieff;        /* Effektivwert des Transformatorstromes [A] */

    printf("Iterative Naeherung der Ausgangsspannung fuer Einweggleichrichter:\n");

    printf("Eingabe RL [Ohm]: ");scanf("%lf",&rl);
    printf("Eingabe Leerlaufspannung Trafo UAC [Veff]: ");scanf("%lf",&utr);
    printf("Eingabe Innenwiderstand des Trafos Ri [Ohm]: "); scanf("%lf",&ri);
    printf("Eingabe Spannungsabfall ueber der Diode UD [V]: ");scanf("%lf",&ud);
    printf("Eingabe Wert des Ladekondensators CL [uF]:");scanf("%lf",&cl);
    printf("Eingabe Startwert fuer den Stromflusswinkel 2a [deg]: ");scanf("%lf",&a);
    printf("Eingabe Frequenz [Hz]: "); scanf("%lf",&freq);

    cl = cl / 1.0E6;          /* cl in Farad wandeln */
    a=a / 180.0 * PI ;       /* 2a in Radian wandeln */
    a=0.5*a;                 /* a ist der halbe Stromflusswinkel */
    utrs = utr * sqrt(2.0);   /* Spitzenwert der Transformatorspannung */
    ul = utr * cos(a);        /* Schaetzwert fuer die erste Spannung ueber der Last */
    idmax = (utrs - ud) / ri; /* Maximaler Diodenstrom */

    /* Iterationsschleife
       Sie wird beendet, wenn sich zwei aufeinanderfolgende Werte von ul betragsmaessig
       um weniger als EPS_ unterscheiden.
    */
    do
    {
        il = ul / rl;          /* Aktueller Laststrom */
        idm = il * ( PI * PI) / (2.0 * a) ; /* Resultierender Diodenspitzenstrom mit Cosinusmodell */

        if (idm > idmax) idm=idmax; /* Es kann nicht mehr Strom fliessen
                                       als der Trafo hergibt */
        if ((ul + ud) >= utrs) ul = utrs-ud-0.1; /* Fall acos(>=1) vermeiden */

        printf("ul: %6.4f\t il: %6.4f\t idm: %5.2f\t 2a: %5.2f\n",ul,il,idm,a * 360.0 /PI);
        ul_alt= ul;

        a = acos((ul + ud) / utrs); /* Neuen Stromflusswinkel berechnen */
        ul = utrs - (idm * ri + ud); /* Neue Lastspannung */

    } while (fabs(ul - ul_alt) > EPS_);

    ubr=(1- a / PI) * il / (freq * cl); /* Brummspannung berechnen */
    printf("Brummspannung: %6.4f [Vss]\n",ubr);

    ieff=il * PI / 2.0 *sqrt(PI / (2.0 * a)); /* Transformatorstrom berechnen */
    printf("Effektivwert des Transformatorstromes: %6.4f [Aeff]\n",ieff);

    while (!_kbhit());

    return 0;
}

```

1.8 Referenzen

- [KRU97] Gerhard Krucker, Skript zur Vorlesung ME 1997, Kapitel 1.8
 [KAM57] J. Kammerloher, Hochfrequenztechnik Teil III, S.189-192, C.F. Wintersche Verlagshandlung 1957.