

3 Netzwerke

Dieses Kapitel behandelt umfassend die Netzwerkanalyse und Synthese mit den Mitteln der Linearen Algebra. Die folgende Vierpoltheorie beschreibt Methoden zur Analyse der Übertragungseigenschaften eines beschalteten Vierpoles:

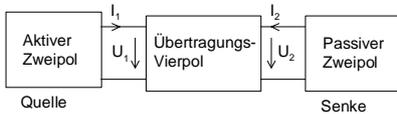


Bild 3-1: Prinzip einer Vierpolschaltung.
Die Quelle speist den Übertragungsvierpol, der das Signal an die Senke abgibt.

Wenn bestimmte Voraussetzungen erfüllt sind, kann mit Hilfe der Linearen Algebra eine Theorie begründet werden, die das Verhalten dieser Vierpole allgemein gültig beschreibt. Die Beschreibung umfasst das Übertragungsverhalten, wie auch Regeln zur Zusammenschaltung von Vierpolen. Erste Grundlagen hierzu wurden von H.P. Biggar¹ systematisch zusammengestellt.

Um einer allgemein gültigen Theorie zu genügen, müssen zwei Voraussetzungen von den Vierpolen erfüllt werden:

Linearität:

Die Kennlinien aller im Vierpol verwendeten Bauelemente sind linear, oder werden als linear angenommen.

Stabilität:

Alle Ströme und Spannungen im Vierpol sind null, wenn von aussen keine Spannung anliegt, d.h., der Vierpol wird ausschliesslich durch die anliegenden Quellen gesteuert.

Wir leiten nachfolgend eine allgemein gültige Theorie zur Vierpolbeschreibung mit Matrizen her. Ziel ist ein Satz allgemein gültiger Matrizengleichungen zur Bestimmung der Betriebskenngrössen und Analyse/Synthese von Verstärkerschaltungen, beruhend auf Teilvierpolen.

Die Analyse mit der Vierpoltheorie hat den grossen Vorteil, dass die gesamten Berechnungen systematisiert werden. Dadurch können auch umfangreichere Probleme methodisch und präzise bearbeitet werden.

Wir zeigen die Grundlagen zur Rechnung mit A-, G-, H-, Y- und Z-Parameter. Wir setzen hierzu die Rechenregeln der Linearen Algebra als bekannt voraus.

3.1 Matrizenform für Vierpole

Das Übertragungsverhalten eines linearen Vierpoles kann mit einem Satz linearer Gleichungen der folgenden Form beschrieben werden:



(3.1)

Bild 3-2: Allgemeine Beschreibung des Übertragungsverhaltens eines linearen Vierpols.

¹ H.P. Biggar, "Application of Matrices to Four Terminal Network Problems", Electronic Engineering, 23, August 1951.

Der Stromfluss erfolgt nach Konvention der Nachrichtentechnik immer zum Vierpol. Daher erscheint I_2 negativ.

Die Koeffizienten A, B, C, D heissen Netzwerk-Parameter. Sie beschreiben das gesamte Verhalten des Vierpols. Sämtliche Eigenschaften und Umformungen des Netzwerkes können berechnet werden, wenn A, B, C, D bekannt sind. In der Linearen Algebra schreibt man in der Regel $A11, A12, A21, A22$ anstatt A, B, C, D .

Mit der Matrixschreibweise wird das obige Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Die Matrix \mathbf{A} wird als Transfermatrix bezeichnet. Sie beinhaltet die *ABCD-Parameter* und wird vor allem zur Kaskadierung (Verkettung) von Vierpolen verwendet. Man schreibt daher Gl.(3.2):

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Mit den Rechenregeln der Linearen Algebra findet man auch einfach:

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

3.2 A-, G-, H-, Y-, Z-Parameter

Neben den bereits gezeigten *ABCD-Parameter* benutzt man zur Beschreibung elektrischer Netzwerke auch noch weitere Formen. Gängig sind die folgenden fünf Parameterbeschreibungen für Vierpole:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (3.5) \quad (3.6)$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (3.7) \quad (3.8)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Es ist offensichtlich, dass alle vier Beschreibungen grundsätzlich dieselbe Information enthalten. Deshalb können auch sämtliche Parameter ineinander umgerechnet werden. Je nach Aufgabenstellung macht es aber Sinn mit genau einem bestimmten Parametertyp zu arbeiten, wie wir später sehen werden.

Die wechselseitigen Beziehungen der Parameter können tabelliert werden:

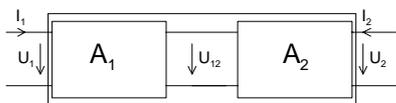
Tab 3-3: AGHYZ-Parameterumrechnungstabelle.

	A	G (C, H ⁻¹)	H	Y	Z
A	$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{G_{21}} & \frac{G_{22}}{G_{21}} \\ \frac{G_{11}}{G_{21}} & \frac{\det G}{G_{21}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-\det H}{H_{21}} & \frac{-H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{-1}{H_{21}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\det Y}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{pmatrix}$
A ⁻¹	$\begin{pmatrix} \frac{A_{22}}{\det A} & \frac{-A_{12}}{\det A} \\ \frac{-A_{21}}{\det A} & \frac{A_{11}}{\det A} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\det G}{G_{12}} & \frac{-G_{22}}{G_{12}} \\ \frac{-G_{11}}{G_{12}} & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \frac{-Y_{11}}{Y_{12}} & \frac{1}{Y_{12}} \\ \frac{-\det Y}{Y_{12}} & \frac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_{22}}{Z_{12}} & \frac{-\det Z}{Z_{12}} \\ \frac{1}{Z_{12}} & \frac{-Z_{11}}{Z_{12}} \end{pmatrix}$
H	$\begin{pmatrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\det A}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{G_{22}}{\det G} & \frac{-G_{12}}{\det G} \\ \frac{-G_{21}}{\det G} & \frac{G_{11}}{\det G} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\det Y}{Y_{11}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\det Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{pmatrix}$
G (C, H ⁻¹)	$\begin{pmatrix} \frac{A_{21}}{A_{11}} & \frac{-\det A}{A_{11}} \\ \frac{1}{A_{11}} & \frac{A_{12}}{A_{11}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{H_{22}}{\det H} & \frac{-H_{12}}{\det H} \\ \frac{-H_{21}}{\det H} & \frac{H_{11}}{\det H} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\det Y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_{22}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{\det Z}{Z_{22}} \end{pmatrix}$
Y	$\begin{pmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\det A}{A_{12}} \\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\det G}{G_{22}} & \frac{G_{12}}{G_{22}} \\ \frac{-G_{21}}{G_{22}} & \frac{1}{G_{22}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\det H}{H_{11}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_{22}}{\det Z} & \frac{-Z_{12}}{\det Z} \\ \frac{-Z_{21}}{\det Z} & \frac{Z_{11}}{\det Z} \end{pmatrix}$
Z	$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det A}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{G_{11}} & \frac{-G_{12}}{G_{11}} \\ \frac{G_{21}}{G_{11}} & \frac{\det G}{G_{11}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\det H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Y_{22}}{\det Y} & \frac{-Y_{12}}{\det Y} \\ \frac{-Y_{21}}{\det Y} & \frac{Y_{11}}{\det Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$

Wie bereits erwähnt, sind alle Parametertypen nützlich, wenn Berechnungen an untereinander verschalteten Vierpolen erfolgen. Durch gezielte Benutzung der richtigen Parameter sind zur Berechnung nur einfache Matrixadditionen und Multiplikationen erforderlich.

3.3 Kaskadierung von Vierpolen

Werden zwei Vierpole hintereinander geschaltet (kaskadiert), so ist die resultierende Transfermatrix das Produkt bei beiden einzelnen Transfermatrizen:



$$A_{1,2} = A_1 \cdot A_2 \quad (3.10)$$

Bild 3-4: Kaskadierung zweier Vierpole.

Die beiden Einzelvierpole A₁ und A₂ werden also in einem neuen Vierpol A_{1,2} zusammengefasst. Die ABCD-Matrix (Transfermatrix) von A_{1,2} beschreibt nachher vollständig das Verhalten der beiden kaskadierten Vierpole.

Beispiel 3-1: Kaskadierung zweier Vierpole.

Man bestimme die Kaskadierung der beiden Vierpole, die durch die ABCD-Matrizen beschrieben sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 10\Omega \\ 0.25\Omega^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5\Omega \\ 0.5\Omega^{-1} & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A_{1,2} = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 10\Omega \\ 0.25\Omega^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5\Omega \\ 0.5\Omega^{-1} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 40\Omega \\ 1.25\Omega^{-1} & 4.25 \end{pmatrix}$$

3.4 Gegenkopplungen mit Vierpolen

Bei Gegenkopplungen werden die Ein- und Ausgänge von zwei Vierpolen in Serie oder Parallel geschaltet. Dadurch kann man beim Netzwerk ganz bestimmte Eigenschaften erreichen, wie z.B. kleiner Eingangswiderstand, grosse Rückwirkung, etc.

Die Berechnung der verschiedenen Gegenkopplungen erfolgt, indem man die entsprechenden H-, Y, oder Z-Parameter der einzelnen Vierpole addiert. Man erhält eine neue Matrix der Zusammenfassung beider Vierpole, die wiederum sämtliche Eigenschaften beinhaltet.

Tab. 3.1 Matrizengleichungen für gegengekoppelte Vierpole.

Gegenkopplung	Blockschaltbild	Matrizengleichung
Serie-Serie		$Z_{1,2} = Z_1 + Z_2$ (3.11)
Parallel-Serie		$G_{1,2} = G_1 + G_2$ $(H_{1,2}^{-1} = H_1^{-1} + H_2^{-1})$ (3.12)
Serie-Parallel		$H_{1,2} = H_1 + H_2$ (3.13)
Parallel-Parallel		$Y_{1,2} = Y_1 + Y_2$ (3.14)

Der Name der Gegenkopplung besagt immer zuerst wie der Eingang gekoppelt ist und nachher wie der Ausgang gekoppelt ist.

Je nach Beschaffenheit der Einzelvierpole ist es möglich, dass die Matrizengleichungen aus Tab. 3.1 nicht angewandt werden dürfen. Mit Hilfe geeigneter Umformungen können aber in solchen Fällen die Einzelvierpole in eine Struktur gebracht werden, damit die Matrizengleichungen angewandt werden können.

3.4.1 Restriktionen zur Berechnung der Gegenkopplung mit Matrizen

Diese einfachen Matrizengleichungen für Gegenkopplungen aus Tab. 3.1 gelten nur, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Ein systematischer Test zur Überprüfung der Zusammenschaltung auf Anwendbarkeit der Matrizengleichungen wurde von E. A. Guillemin² zusammengestellt.

3.4.1.1 Parallelschaltung

Die Zulässigkeit für eine Parallelschaltung wird dadurch überprüft, dass man die Ausgänge separat kurzschliesst:

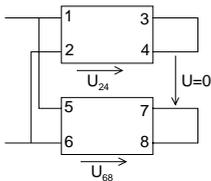


Bild 3-5: Prüfkriterien für eine Parallel-Zusammenschaltung nach Tab. 3.1.

Zur Anwendbarkeit der Matrizengleichungen müssen die Bedingungen $U_{24}=U_{68}$ oder $U=0$ erfüllt sein.

Für die Parallelschaltung müssen beide Bedingungen $U_{24}=U_{68}$ oder $U=0$ erfüllt sein, sonst können die Matrizengleichungen nach Tab. 3.1 nicht benutzt werden.

Selbstverständlich müssen die Bedingungen auch erfüllt sein, wenn die Ein- und Ausgänge vertauscht werden.

3.4.1.2 Serieschaltung

Analog ist das Vorgehen für eine Serieschaltung, nur dass Ausgänge offen gelassen werden:

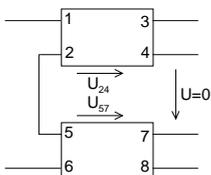


Bild 3-6: Prüfkriterien für eine Serie-Zusammenschaltung nach Tab. 3.1.

Zur Anwendbarkeit der Matrizengleichungen müssen die Bedingungen $U_{24}=U_{57}$ oder $U=0$ erfüllt sein.

Auch hier gilt analog für die Anwendbarkeit der Matrizengleichungen in Tab. 3.1: $U_{24}=U_{57}$ oder $U=0$. Ebenso müssen die Bedingungen auch erfüllt sein, wenn die Ein- und Ausgänge vertauscht werden.

3.4.1.3 Serie Parallelschaltung, Parallel-Serieschaltung

Das Vorgehen wird an einer Serie-Parallelschaltung gezeigt. Für die Parallel-Serieschaltung erfolgt das Vorgehen genau gleich, nur dass die Ein- und Ausgänge vertauscht sind.

Die Überprüfung des seriegeschalteten Endes muss den Kriterien in Bild a.) $U_{24}=U_{67}$, daraus folgend $U=0$, genügen. Das parallel geschaltete Ende wird nach Bild b.) untersucht und es muss gelten $U_{24}=U_{67}$ oder $U=0$.

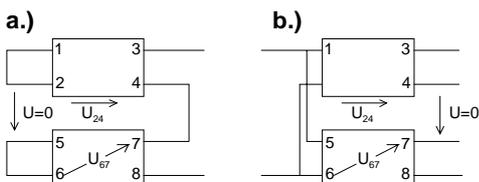


Bild 3-7: Prüfkriterien für Serie-Parallel-Zusammenschaltung nach Tab. 3.1.

- a.) Serie-Parallelschaltung
- b.) Parallel-Serieschaltung.

Auch hier müssen wiederum **beide** Kriterien erfüllt sein, damit die Matrizengleichungen in Tab. 3.1 zur Berechnung der Zusammenschaltung verwendet werden können.

² E.A. Guillemin, "Communication Networks", Vol. II, John Wiley, 1935

Wir zeigen nachfolgend ein Netzwerk, bei der die Zulässigkeit für die Matrixgleichungen nach Tab. 3.1 nicht gegeben ist.

Das nachfolgende Netzwerk ist für eine Berechnung mit der Matrizenmethode nicht zulässig, da offensichtlich $U_{24} \neq U_{68}$ wenn die Anschlüsse auf der rechten Seite separat kurzgeschlossen werden.

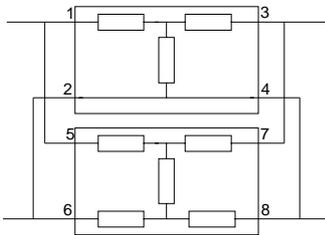


Bild 3-8: Unzulässiges Netzwerk für eine Zusammenschaltung nach Tab. 3.1.

Beispiel 3-2: Unzulässiges PP-Gegenkopplungsnetzwerk für Matrizenrechnung.

Unzulässige Netzwerke entstehen immer, wenn symmetrisch und unsymmetrisch aufgebaute Vierpole zusammenschaltet werden. Das Problem kann aber durch eine Transformation eines Vierpoles in eine äquivalente Form gelöst werden. Man verschiebt die Widerstände im Pfad 6,8 nach oben in Serie zum Pfad 5,7. Man erhält nun ein Netzwerk das problemlos mit der Gleichung (3.14) berechnet werden kann.

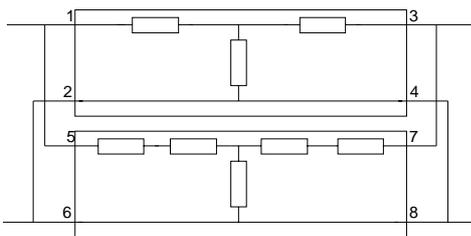


Bild 3-9: Zulässiges Netzwerk für eine Zusammenschaltung nach Tab. 3.1.

Geändertes Netzwerk nach Bild 3-8, so das die Kriterien erfüllt sind.

3.4.1.4 Problemlose Fälle

Aus den vorher aufgeführten Kriterien können Regeln für eine problemlose Zusammenschaltung abgeleitet werden. Man beschränkt sich hierbei auf erdunsymmetrische Vierpole, d.h. ein Pfad im Vierpol ist immer durchverbunden.

Für die vier Gegenkopplungen folgt daher:

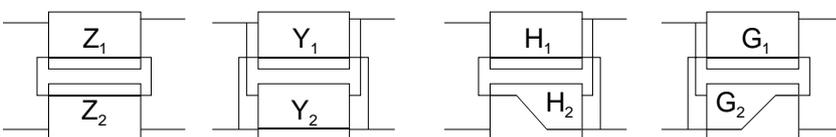


Bild 3-10: Problemlose Fälle zur Zusammenschaltung nach Tab. 3.1.

Sind die Vierpole an den entsprechenden Klemmen durchverbunden, sind zwangsläufig die Zusammenschaltungskriterien erfüllt.

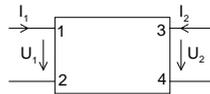
Die Verkettung von Vierpolen ist in jedem Fall problemlos und bedarf daher keiner weiteren Betrachtung.

3.5 Definition der A-, H-, Y-, Z-Parameter

Müssen die Parameter eines Vierpoles bestimmt werden, bedient man sich der Definitionsgleichungen. Sie beschreiben die formale Definition der einzelnen Matrizenelemente mit den Randbedingungen. Die Randbedingungen besagen, welche Anschlüsse des Vierpoles offen zu lassen, oder kurz zu schliessen sind.

Tab. 3.2 Definition der A-, H-, Y- und Z-Parameter.

$A=$	$\begin{pmatrix} \left. \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ offen}} & \left. \begin{matrix} U_1 \\ -I_2 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ kurz}} \\ \left. \begin{matrix} I_1 \\ U_2 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ offen}} & \left. \begin{matrix} I_1 \\ -I_2 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ kurz}} \end{pmatrix}$
$H=$	$\begin{pmatrix} \left. \begin{matrix} U_1 \\ I_1 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ kurz}} & \left. \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \end{matrix} \right _{1,2 \text{ offen}} \\ \left. \begin{matrix} I_2 \\ I_1 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ kurz}} & \left. \begin{matrix} I_2 \\ U_2 \end{matrix} \right _{1,2 \text{ offen}} \end{pmatrix}$
$Y=$	$\begin{pmatrix} \left. \begin{matrix} I_1 \\ U_1 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ kurz}} & \left. \begin{matrix} I_1 \\ U_2 \end{matrix} \right _{1,2 \text{ kurz}} \\ \left. \begin{matrix} I_2 \\ U_1 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ kurz}} & \left. \begin{matrix} I_2 \\ U_2 \end{matrix} \right _{1,2 \text{ kurz}} \end{pmatrix}$
$Z=$	$\begin{pmatrix} \left. \begin{matrix} U_1 \\ I_1 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ offen}} & \left. \begin{matrix} U_1 \\ I_2 \end{matrix} \right _{1,2 \text{ offen}} \\ \left. \begin{matrix} U_2 \\ I_1 \end{matrix} \right _{3,4 \text{ offen}} & \left. \begin{matrix} U_2 \\ I_2 \end{matrix} \right _{1,2 \text{ offen}} \end{pmatrix}$



(3.15)

(3.16)

(3.17)

(3.18)

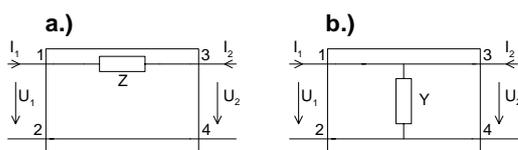
Die einzelnen Grössen werden durch Analyse der Schaltung oder Messung bestimmt. Bei Messungen wechselstrommässiger Grössen gelten die Parameter natürlich nur für die Bezugsfrequenz bei der die Messung erfolgte.

3.5.1 Beispiele zur Herleitung von Vierpol-Parameter

Beim analytischen Ansatz werden die Parameter aus den zum Vierpol zugehörigen Knoten-/Maschengleichungen bestimmt. Je nach der Art der benötigten Parameter werden dann die Gleichungen umgeformt bis sie der Struktur einer der Gleichungen (3.5)..(3.9) entsprechen.

Elementarvierpole

Die wohl elementarsten Vierpole sind in Bild a.) b.) gezeigt:



Die Eingangsspannung, der Eingangsstrom und die Transfermatrix werden nach Gl. (3.5):

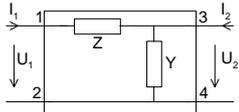
$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 - ZI_2 \\ I_1 &= -I_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Dito für Vierpol b.):

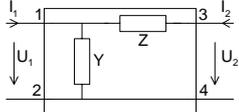
$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \\ I_1 &= YU_2 - I_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Kombinationen

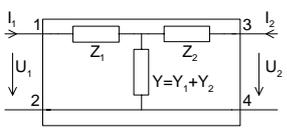
Werden nun beide Vierpole kaskadiert, erhalten wir für den Fall, dass A_p, A_2 miteinander verkettet werden die Transfermatrix:

$$A_{K1} = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+YZ & Z \\ Y & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$


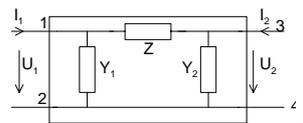
Der Fall, dass in umgekehrter Reihenfolge A_2, A_1 miteinander verkettet werden, ergibt die Transfermatrix:

$$A_{K2} = A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ Y & 1+YZ \end{pmatrix} \quad (3.22)$$


Wir haben nun je ein Π - und ein T-Halbglied erhalten. Das vollständige T-Glied erhalten wir durch Kaskadieren zweier Halbglieder aus (3.21) und (3.22). Wir notieren für die einzelnen Komponenten Indizes.

$$\begin{aligned} A_{\Pi} &= A_{K1} \cdot A_{K2} = \begin{pmatrix} 1+Y_1Z_1 & Z_1 \\ Y_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_2 \\ Y_2 & 1+Y_2Z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+Y(Z_1+Z_2) & Z_1+Z_2+YZ_1Z_2 \\ Y & 1+Y(Z_1+Z_2) \end{pmatrix} \quad (Y := Y_1 + Y_2) \end{aligned} \quad (3.23)$$


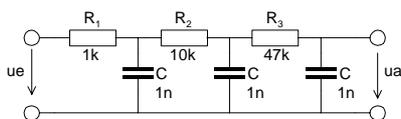
Das Π -Glied wird analog durch Kaskadieren der Transfermatrizen (3.22) und (3.21):

$$\begin{aligned} A_{\Pi} &= A_{K2} \cdot A_{K1} = \begin{pmatrix} 1 & Z_2 \\ Y_2 & 1+Y_2Z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+Y_1Z_1 & Z_1 \\ Y_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+Y_1Z & Z \\ Y_2+Y_1(1+Y_2Z) & 1+Z(Y_1+Y_2) \end{pmatrix} \quad (Z := Z_1 + Z_2) \end{aligned} \quad (3.24)$$


Beispiel 3-3: Bestimmung der Transfermatrix eines Tiefpasses 3. Ordnung

Von der gegebenen Schaltung ist formal mittels geeigneter Kaskadierung von Einzelvierpolen die Transfermatrix herzuleiten. Zeigen Sie nachher den Amplitudengang im Frequenzbereich

10Hz..100kHz grafisch, wenn für das unbelastete Netzwerk gilt $\frac{u_a}{u_e} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{A_{11}}$.



Lösung

Prinzipiell ist die Aufteilung in Teilvierpole auf verschiedene Arten möglich. Wir wählen eine dreifache Kaskadierung von halben Π -Gliedern nach Gl. (3.21). Wir erhalten den Ansatz:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1+sCR_1 & R_1 \\ sC & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+sCR_2 & R_2 \\ sC & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+sCR_3 & R_3 \\ sC & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+sC(3R_1+2R_2+R_3)+s^2C^2(2R_1R_2+2R_1R_3+2R_2R_2)+s^3R_1R_2R_3C^3 & R_1+R_2+R_3+sC(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)+s^2C^2R_1R_2R_3 \\ 3sC+2s^2C^2(R_2+R_3)+s^3C^3R_2R_3 & 1+sC(R_2+2R_3)+s^2C^2R_2R_3 \end{pmatrix}$$

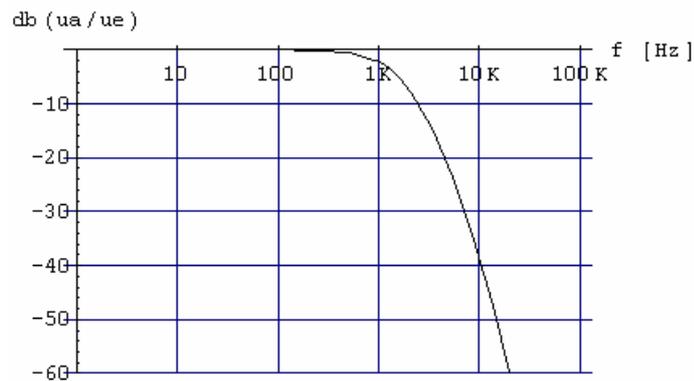
Den Frequenzgang erhalten wir direkt aus der Transfermatrix A:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{A} = \frac{1}{1+sC(3R_1+2R_2+R_3)+s^2C^2(2R_1R_2+2R_1R_3+2R_2R_2)+s^3R_1R_2R_3C^3}$$

Mit: $s = \sigma + j\omega$

$$F(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 C^2 (2R_1R_2 + 2R_1R_3 + 2R_2R_2) + j\omega [C(3R_1 + 2R_2 + R_3) - R_1R_2R_3C^3]}$$

Der Betrag des komplexen Frequenzganges wird dann:

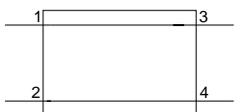
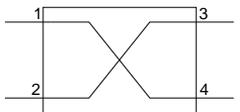
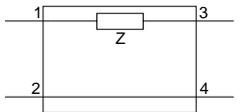
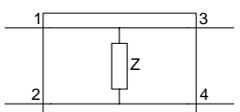


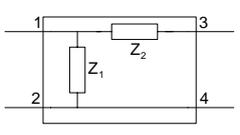
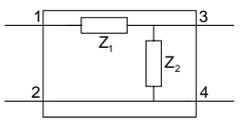
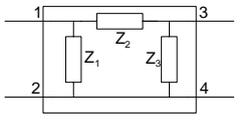
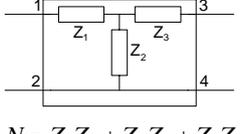
3.6 Vierpol-Parameter passiver Vierpole

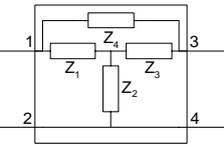
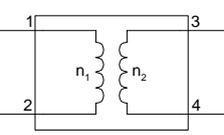
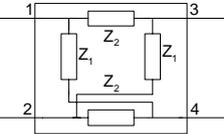
Die nachfolgende Tabelle zeigt eine Zusammenstellung der wichtigsten passiven Vierpole in Parameterform, so dass sie direkt in Berechnungen übernommen werden können. Matrizen für andere Vierpole können durch geeignetes Zusammenschalten entwickelt werden.

Die Benutzung des tabellierten Materials erspart viel Zeit, da die Herleitung mit Kirchhoffschen Sätzen enorm zeit- und rechenaufwendig ist.

Tab. 3.3: Vierpol-Parameter gängiger passiver Vierpole.

Verbindung	A	G	H
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
	Y	Z	
	existiert nicht	existiert nicht	
Kreuzung	A	G	H
	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	Y	Z	
	existiert nicht	existiert nicht	
Längswiderstand	A	G	H
	$\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Z & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
	Y	Z	
	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \\ -1 & 1 \\ \frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \end{pmatrix}$	existiert nicht	
Querwiderstand	A	G	H
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{Z} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z} \end{pmatrix}$
	Y	Z	
	existiert nicht	$\begin{pmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{pmatrix}$	

Γ-Glied 1 	A $\begin{pmatrix} 1 & Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{pmatrix}$	G $\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1} & -1 \\ 1 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}$	H $\begin{pmatrix} \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ \frac{-Z_1}{Z_1 + Z_2} & \frac{1}{Z_1 + Z_2} \end{pmatrix}$
	Y $\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & \frac{-1}{Z_2} \\ \frac{-1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2} \end{pmatrix}$	Z $\begin{pmatrix} Z_1 & Z_1 \\ Z_1 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}$	
Γ-Glied 2 	A $\begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}$	G $\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1 + Z_2} & \frac{-Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{pmatrix}$	H $\begin{pmatrix} Z_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_2} \end{pmatrix}$
	Y $\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1} & \frac{-1}{Z_1} \\ \frac{-1}{Z_1} & \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \end{pmatrix}$	Z $\begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{pmatrix}$	
Π-Glied 	A $\begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_1 \cdot Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{pmatrix}$	G $\begin{pmatrix} \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1(Z_2 + Z_3)} & \frac{-Z_3}{Z_2 + Z_3} \\ \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} & \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} \end{pmatrix}$	H $\begin{pmatrix} \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ \frac{-Z_1}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_3(Z_1 + Z_2)} \end{pmatrix}$
	Y $\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & \frac{-1}{Z_2} \\ \frac{-1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \end{pmatrix}$	Z $\begin{pmatrix} \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \end{pmatrix}$	
T-Glied  $N = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3$	A $\begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{pmatrix}$	G $\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1 + Z_2} & \frac{-Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} & Z_3 + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{pmatrix}$	H $\begin{pmatrix} \frac{N}{Z_2 + Z_3} & \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \\ \frac{-Z_2}{Z_2 + Z_3} & \frac{1}{Z_2 + Z_3} \end{pmatrix}$
	Y $\begin{pmatrix} \frac{Z_2 + Z_3}{N} & \frac{-Z_2}{N} \\ \frac{-Z_2}{N} & \frac{Z_1 + Z_2}{N} \end{pmatrix}$	Z $\begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}$	

Überbrücktes T-Glied	A	G	H
 <p> $M = Z_1 + Z_3 + Z_4$ $N = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$ $P = M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4$ $Q = M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_3 Z_4$ </p>	$\begin{pmatrix} \frac{P}{M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3} & \frac{N \cdot Z_4}{M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3} \\ \frac{M}{M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3} & \frac{Q}{M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{M}{P} & -\frac{M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3}{P} \\ \frac{M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3}{P} & \frac{N \cdot Z_4}{P} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{N \cdot Z_4}{Q} & \frac{M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3}{Q} \\ -\frac{M \cdot Z_2 + Z_1 Z_3}{Q} & \frac{M}{Q} \end{pmatrix}$
	<p style="text-align: center;">Y</p> $\begin{pmatrix} \frac{Z_2 + Z_3}{N} + \frac{1}{Z_4} & -\frac{Z_2}{N} - \frac{1}{Z_4} \\ -\frac{Z_2}{N} - \frac{1}{Z_4} & \frac{Z_1 + Z_2}{N} + \frac{1}{Z_4} \end{pmatrix}$	<p style="text-align: center;">Z</p> $\begin{pmatrix} \frac{(Z_1 + Z_2)Z_4 + N}{M} & \frac{Z_2 Z_4 + N}{M} \\ \frac{Z_2 Z_4 + N}{M} & \frac{(Z_2 + Z_3)Z_4 + N}{M} \end{pmatrix}$	
Idealer Transformator	A	G	H
	$\begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ n_2 & 0 \\ 0 & n_2 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -n_2 \\ n_2 & 0 \\ n_2 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ -n_1 & 0 \\ n_2 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}$
	<p style="text-align: center;">Y</p> <p style="text-align: center;">existiert nicht</p>	<p style="text-align: center;">Z</p> <p style="text-align: center;">existiert nicht</p>	
Symmetrische Brücke	A	G	H
	$\begin{pmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 - Z_2} & \frac{2Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 - Z_2} \\ \frac{2}{Z_1 - Z_2} & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 - Z_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{Z_1 + Z_2} & \frac{-Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{2Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{2Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ \frac{-Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{2}{Z_1 + Z_2} \end{pmatrix}$
	<p style="text-align: center;">Y</p> $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \end{pmatrix}$	<p style="text-align: center;">Z</p> $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2) & \frac{1}{2}(Z_1 - Z_2) \\ \frac{1}{2}(Z_1 - Z_2) & \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2) \end{pmatrix}$	

3.7 Betriebskenngrößen

Die Betriebskenngrößen, auch Betriebsparameter genannt, eines Vierpoles beschreiben dessen Übertragungseigenschaften im Vorwärts- und im Rückwärtsbetrieb. Die Betriebskennwerte umfassen die Größen:

- Ausgangsleitwert, Ausgangswiderstand
- Eingangsleitwert, Eingangswiderstand
- Spannungsverstärkung
- Stromverstärkung
- Transimpedanz

3.7.1 Vorwärtsbetrieb

Vorwärtsbetrieb heisst, der Signalfluss erfolgt von der Quelle an die Klemmen 1,2 in den Vierpol und wird an den Klemmen 3,4 an die Last abgegeben. Die Quelle wird als reale Stromquelle I_G mit Innenleitwert Y_G dargestellt. Die Last wird durch den Leitwert Y_L verkörpert:

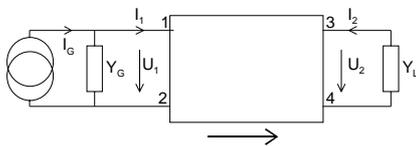


Bild 3-11: Vierpol im Vorwärtsbetrieb.

Der Signalfluss erfolgt von den Klemmen 1,2 zu den Klemmen 3,4.

Die Betriebskenngrößen für den Vorwärtsbetrieb sind wie folgt definiert:

Tab. 3.4 Betriebskenngrößen für den Vorwärtsbetrieb.

Eingangswiderstand:	$Z_{in} = \frac{U_1}{I_1}$	(3.25)
Eingangsleitwert:	$Y_{in} = \frac{I_1}{U_1}$	(3.26)
Spannungsverstärkung vorwärts:	$v_{uf} = \frac{U_2}{U_1} = Y_{in} \cdot Z_{tf}$	(3.27)
Stromverstärkung vorwärts:	$v_{if} = \frac{I_2}{I_1} = Z_{in} \cdot Y_{tf}$	(3.28)
Transimpedanz vorwärts:	$Z_{tf} = \frac{U_2}{I_1}$	(3.29)
Transadmittanz vorwärts:	$Y_{tf} = \frac{I_2}{U_1}$	(3.30)

3.7.2 Rückwärtsbetrieb

Beim Rückwärtsbetrieb erfolgt der Signalfluss von der Quelle an die Klemmen 3,4 in den Vierpol und wird an den Klemmen 1,2 an die Last abgegeben. Die Größen für den Rückwärtsbetrieb werden vor allem dazu benutzt um Rückwirkungseffekte zu beschreiben. In der Praxis ist immer eine Rückwirkung vom Ausgang auf den Eingang festzustellen. Auch wenn diese Einflüsse oft vernachlässigbar sind, müssen sie dennoch beschrieben werden.

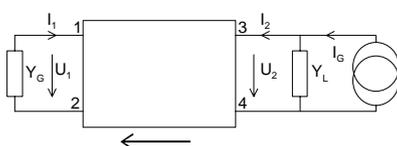


Bild 3-12: Vierpol im Rückwärtsbetrieb..

Der Signalfluss erfolgt von den Klemmen 3,4 zu den Klemmen 1,2.

Wird in einer Rechnung die Rückwirkung vernachlässigt, spricht man von einer *unilateralen* Betrachtung. In der Tat hat in vielen die Rückwirkung einen so kleinen Einfluss, dass sie vernachlässigbar ist.

Die Betriebskenngrößen für den Rückwärtsbetrieb sind wie folgt definiert:

Tab. 3.5 Betriebskenngrößen für den Rückwärtsbetrieb.

Ausgangswiderstand:	$Z_{out} = \frac{U_2}{I_2}$	(3.31)
Ausgangsleitwert:	$Y_{out} = \frac{I_2}{U_2}$	(3.32)
Spannungsverstärkung rückwärts:	$v_{ur} = \frac{U_1}{U_2} = Y_{out} \cdot Z_{tr}$	(3.33)
Stromverstärkung rückwärts:	$v_{ir} = \frac{I_1}{I_2} = Z_{out} \cdot Y_{tr}$	(3.34)
Transimpedanz rückwärts:	$Z_{tr} = \frac{U_1}{I_2}$	(3.35)
Transadmittanz rückwärts:	$Y_{tr} = \frac{I_1}{U_2}$	(3.36)

3.8 Kenngrößen beschalteter Vierpole

Im Regelfall werden Vierpole von einer realen Quelle mit Innenwiderstand angesteuert und geben das Signal an den Ausgangsklemmen an einen Lastwiderstand ab. Die Betriebskenngrößen für den belasteten Vierpol lassen sich einfach bestimmen. Wir führen die Kenngrößenbestimmung exemplarisch für die H-Parameter durch, da diese für uns besondere Bedeutung für die Dimensionierung von Verstärkerschaltungen haben.

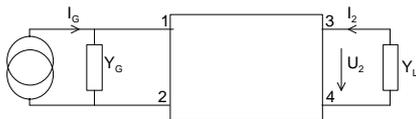


Bild 3-13: Allgemeiner Fall des beschalteten Vierpols. Die Ansteuerung erfolgt mit einer realen Quelle I_s, R_G . Die Last wird durch den Leitwert Y_L verkörpert.

Die Gleichungen für den Vierpol lauten nach Gl. (3.7):

$$U_1 = H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot U_2 \quad (3.37)$$

$$I_2 = H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2 \quad (3.38)$$

Für die Last als Zweipol gilt:

$$I_2 = -Y_L \cdot U_2 \quad (3.39)$$

Eingangswiderstand

Der Eingangswiderstand wird in einem ersten Schritt durch Gleichsetzen von Gl. (3.38) und (3.39):

$$\begin{aligned} -Y_L \cdot U_2 &= H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2 \quad \rightarrow \quad -(Y_L + H_{22})U_2 = H_{21} \cdot I_1 \\ U_2 &= -\frac{H_{21}}{Y_L + H_{22}} I_1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Anschliessendes Einsetzen von U_2 in Gl. (3.37) ergibt sich mit wenig Umformen der Eingangswiderstand Z_{in} :

$$\begin{aligned} U_1 &= H_{11} \cdot I_1 - H_{12} \frac{H_{21}}{Y_L + H_{22}} I_1 = I_1 \left(H_{11} - \frac{H_{12} H_{21}}{Y_L + H_{22}} \right) \\ Z_{in} &= \frac{U_1}{I_1} = \frac{H_{11} Y_L + \det H}{Y_L + H_{22}} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Eingangsleitwert

Der Eingangsleitwert ist per Definition ist der Kehrwert des Eingangswiderstandes:

$$Y_{in} = \frac{I_1}{U_1} = \frac{1}{Z_{in}} = \frac{Y_L + H_{22}}{H_{11} Y_L + \det H} \quad (3.42)$$

Ausgangswiderstand

Da wir hier den Rückwärtsbetrieb untersuchen ist der Quellenwiderstand R_Q die aktive Last. Für den Zweipol R_Q gilt offensichtlich die Beziehung:

$$-I_1 = U_1 Y_G \quad \rightarrow \quad U_1 = \frac{-I_1}{Y_G} \quad (3.43)$$

Wir setzen Gl. (3.43) mit (3.37) gleich, lösen nach I_1 auf und setzen in Gl. (3.38) ein und vereinfachen:

$$\frac{-I_1}{Y_G} = H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot U_2 \quad \rightarrow \quad I_1 = -U_2 \frac{H_{12} Y_G}{1 + H_{11} Y_G} \quad (3.44)$$

$$I_2 = -H_{21} \frac{H_{12} Y_G}{1 + H_{11} Y_G} + H_{22} U_2$$

$$Z_{out} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{1 + H_{11} Y_G}{Y_G \det H + H_{22}} \quad (3.45)$$

Ausgangsleitwert

Als Kehrwert des Ausgangswiderstandes wird der Leitwert:

$$Y_{out} = \frac{I_2}{U_2} = \frac{1}{Z_{out}} = \frac{Y_G \det H + H_{22}}{1 + H_{11} Y_G} \quad (3.46)$$

Spannungsverstärkung (vorwärts)

Zur Bestimmung der Stromverstärkung im Vorwärtsbetrieb setzen wir Gl. (3.39) mit (3.38) gleich und lösen nach I_1 auf:

$$-Y_L \cdot U_2 = H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2 \quad \rightarrow I_1 = -U_2 \frac{Y_L + H_{22}}{H_{21}} \quad (3.47)$$

Wir setzen Gl. (3.47) nun in Gl. (3.37) ein und lösen nach $\frac{U_2}{U_1}$ auf:

$$U_1 = -U_2 \frac{Y_L + H_{22}}{H_{21}} H_{11} + H_{12} \cdot U_2 \quad \rightarrow v_{uf} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-H_{21}}{H_{11} Y_L + \det H} \quad (3.48)$$

Stromverstärkung (vorwärts)

Die Spannung U_2 ist gemäss Gl.(3.40). Wir setzen U_2 direkt in Gl. (3.38) ein und lösen nach $\frac{I_2}{I_1}$ auf:

$$I_2 = H_{21} I_1 - H_{22} \frac{H_{21}}{Y_L + H_{22}} I_1 \quad \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{H_{21} Y_L}{H_{22} + Y_L} \quad (3.49)$$

Transimpedanz (vorwärts)

Aus Gl. (3.40) folgt direkt durch Umformen:

$$Z_{if} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{-H_{21}}{H_{22} + Y_L} \quad (3.50)$$

Die restlich verbleibenden Grössen Z_{ir} , v_{ur} , v_{ir} werden in analoger Vorgehensweise bestimmt.

3.8.1 Tabellarische Auflistung der Betriebskenngrößen

Tab. 3.6: Betriebskenngrößen beschalteter Vierpole mit Leitwerten.

Vorwärtsbetrieb

	A	G(C, H⁻¹)	H	Y	Z
Y_{in}	$\frac{A_{21} + A_{22}Y_L}{A_{11} + A_{12}Y_L}$	$\frac{G_{11} + Y_L \det G}{1 + G_{22}Y_L}$	$\frac{H_{22} + Y_L}{H_{11}Y_L + \det H}$	$\frac{Y_{11}Y_L + \det Y}{Y_{22} + Y_L}$	$\frac{1 + Z_{22}Y_L}{Z_{11} + Y_L \det Z}$
Z_{in}	$\frac{A_{11} + A_{12}Y_L}{A_{21} + A_{22}Y_L}$	$\frac{1 + G_{22}Y_L}{G_{11} + Y_L \det G}$	$\frac{H_{11}Y_L + \det H}{H_{22} + Y_L}$	$\frac{Y_{22} + Y_L}{Y_{11}Y_L + \det Y}$	$\frac{Z_{11} + Y_L \det Z}{1 + Z_{22}Y_L}$
v_{uf}	$\frac{1}{A_{11} + A_{12}Y_L}$	$\frac{G_{21}}{1 + G_{22}Y_L}$	$\frac{-H_{21}}{H_{11}Y_L + \det H}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_L}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{11} + Y_L \det Z}$
v_{if}	$\frac{-Y_L}{A_{21} + A_{22}Y_L}$	$\frac{-G_{21}Y_L}{G_{11} + Y_L \det G}$	$\frac{H_{21}Y_L}{H_{22} + Y_L}$	$\frac{Y_{21}Y_L}{Y_{11}Y_L + \det Y}$	$\frac{-Z_{21}Y_L}{1 + Z_{22}Y_L}$
Z_{if}	$\frac{1}{A_{21} + A_{22}Y_L}$	$\frac{G_{21}}{G_{11} + Y_L \det G}$	$\frac{-H_{21}}{H_{22} + Y_L}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_L + \det Y}$	$\frac{Z_{21}}{1 + Z_{22}Y_L}$
Y_{if}	$\frac{-Y_L}{A_{11} + A_{12}Y_L}$	$\frac{-G_{21}Y_L}{1 + G_{22}Y_L}$	$\frac{H_{21}Y_L}{H_{11}Y_L + \det H}$	$\frac{Y_{21}Y_L}{Y_{22} + Y_L}$	$\frac{-Z_{21}Y_L}{Z_{11} + Y_L \det Z}$

Rückwärtsbetrieb

	A	G(C, H⁻¹)	H	Y	Z
Y_{out}	$\frac{A_{21} + A_{11}Y_G}{A_{22} + A_{12}Y_G}$	$\frac{G_{11} + Y_G}{G_{22}Y_G + \det G}$	$\frac{H_{22} + Y_G \det H}{1 + H_{11}Y_G}$	$\frac{Y_{22}Y_G + \det Y}{Y_{11} + Y_G}$	$\frac{1 + Z_{11}Y_G}{Z_{22} + Y_G \det Z}$
Z_{out}	$\frac{A_{22} + A_{12}Y_G}{A_{21} + A_{11}Y_G}$	$\frac{G_{22}Y_G + \det G}{G_{11} + Y_G}$	$\frac{1 + H_{11}Y_G}{H_{22} + Y_G \det H}$	$\frac{Y_{11} + Y_G}{Y_{22}Y_G + \det Y}$	$\frac{Z_{22} + Y_G \det Z}{1 + Z_{11}Y_G}$
v_{ur}	$\frac{\det A}{A_{22} + A_{12}Y_G}$	$\frac{-G_{12}}{G_{22}Y_G + \det G}$	$\frac{H_{12}}{1 + H_{11}Y_G}$	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11} + Y_G}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22} + Y_G \det Z}$
v_{ir}	$\frac{-Y_G \det A}{A_{21} + A_{11}Y_G}$	$\frac{G_{12}Y_G}{G_{11} + Y_G}$	$\frac{-H_{12}Y_G}{H_{22} + Y_G \det H}$	$\frac{Y_{12}Y_G}{Y_{22}Y_G + \det Y}$	$\frac{-Z_{12}Y_G}{1 + Z_{11}Y_G}$
Z_{ir}	$\frac{\det A}{A_{21} + A_{11}Y_G}$	$\frac{-G_{12}}{G_{11} + Y_G}$	$\frac{H_{12}}{H_{22} + Y_G \det H}$	$\frac{-Y_{12}}{Y_{22}Y_G + \det Y}$	$\frac{Z_{12}}{1 + Z_{11}Y_G}$
Y_{ir}	$\frac{-Y_G \det A}{A_{22} + A_{12}Y_G}$	$\frac{G_{12}Y_G}{G_{22}Y_G + \det G}$	$\frac{-H_{12}Y_G}{1 + H_{11}Y_G}$	$\frac{Y_{12}Y_G}{Y_{11} + Y_G}$	$\frac{-Z_{12}Y_G}{Z_{22} + Y_G \det Z}$

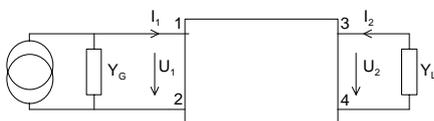


Bild 3-14: Schaltbild mit Konventionen zu Tab. 3.6.

Vorwärtsbetrieb

Tab. 3.7: Betriebskenngrößen beschalteter Vierpole mit Widerständen.

	A	G (C, H¹)	H	Y	Z
Y_{in}	$\frac{A_{21}R_L + A_{22}}{A_{11}R_L + A_{12}}$	$\frac{G_{11}R_L + \det G}{R_L + G_{22}}$	$\frac{H_{22}R_L + 1}{H_{11} + R_L \det H}$	$\frac{Y_{11} + R_L \det Y}{Y_{22}R_L + 1}$	$\frac{R_L + Z_{22}}{Z_{11}R_L + \det Z}$
Z_{in}	$\frac{A_{11}R_L + A_{12}}{A_{21}R_L + A_{22}}$	$\frac{R_L + G_{22}}{G_{11}R_L + \det G}$	$\frac{H_{11} + R_L \det H}{H_{22}R_L + 1}$	$\frac{Y_{22}R_L + 1_a}{Y_{11} + R_L \det Y}$	$\frac{Z_{11}R_L + \det Z}{R_L + Z_{22}}$
v_{uf}	$\frac{R_L}{A_{11}R_L + A_{12}}$	$\frac{G_{21}R_L}{R_L + G_{22}R_L}$	$\frac{-H_{21}R_L}{H_{11} + R_L \det H}$	$\frac{-Y_{21}R_L}{Y_{22}R_L + 1}$	$\frac{-Z_{21}R_L}{Z_{11}R_L + \det Z}$
v_{if}	$\frac{-1}{A_{21}R_L + A_{22}}$	$\frac{-G_{21}}{G_{11}R_L + \det G}$	$\frac{H_{21}}{H_{22}R_L + 1}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11} + R_L \det Y}$	$\frac{-Z_{21}}{R_L + Z_{22}}$
Z_{if}	$\frac{R_L}{A_{21}R_L + A_{22}}$	$\frac{G_{21}R_L}{G_{11}R_L + \det G}$	$\frac{-H_{21}R_L + 1}{H_{22}R_L}$	$\frac{-Y_{21}R_L}{Y_{11} + R_L \det Y}$	$\frac{Z_{21}R_L}{R_L + Z_{22}}$
Y_{if}	$\frac{-1}{A_{11}R_L + A_{12}}$	$\frac{-G_{21}}{R_L + G_{22}}$	$\frac{H_{21}}{H_{11} + R_L \det H}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{22}R_L + 1}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{11}R_L + \det Z}$

Rückwärtsbetrieb

	A	G (C, H¹)	H	Y	Z
Y_{out}	$\frac{A_{21}R_G + A_{11}}{A_{22}R_G + A_{12}}$	$\frac{G_{11}R_G + R_G}{G_{22} + R_G \det G}$	$\frac{H_{22}R_G + \det H}{R_G + H_{11}}$	$\frac{Y_{22} + R_G \det Y}{Y_{11}R_G + 1}$	$\frac{R_G + Z_{11}}{Z_{22}R_G + \det Z}$
Z_{out}	$\frac{A_{22}R_G + A_{12}}{A_{21}R_G + A_{11}}$	$\frac{G_{22} + R_G \det G}{G_{11}R_G + 1}$	$\frac{R_G + H_{11}}{H_{22}R_G + \det H}$	$\frac{Y_{11}R_G + 1}{Y_{22} + R_G \det Y}$	$\frac{Z_{22}R_G + \det Z}{R_G + Z_{11}}$
v_{ur}	$\frac{R_G \det A}{A_{22}R_G + A_{12}}$	$\frac{-G_{12}R_G}{G_{22} + R_G \det G}$	$\frac{H_{12}R_G}{R_G + H_{11}}$	$\frac{-Y_{12}R_G}{Y_{11}R_G + 1}$	$\frac{Z_{12}R_G}{Z_{22}R_G + \det Z}$
v_{ir}	$\frac{-\det A}{A_{21}R_G + A_{11}}$	$\frac{G_{12}}{G_{11}R_G + 1}$	$\frac{-H_{12}}{H_{22}R_G + \det H}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22} + R_G \det Y}$	$\frac{-Z_{12}}{R_G + Z_{11}}$
Z_{ir}	$\frac{R_G \det A}{A_{21}R_G + A_{11}}$	$\frac{-G_{12}R_G}{G_{11}R_G + 1}$	$\frac{H_{12}R_G}{H_{22}R_G + \det H}$	$\frac{-Y_{12}R_G}{Y_{22} + R_G \det Y}$	$\frac{Z_{12}R_G}{R_G + Z_{11}}$
Y_{ir}	$\frac{-\det A}{A_{22}R_G + A_{12}}$	$\frac{G_{12}}{G_{22} + R_G \det G}$	$\frac{-H_{12}}{R_G + H_{11}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{11}R_G + 1}$	$\frac{-Z_{12}}{Z_{22}R_G + \det Z}$

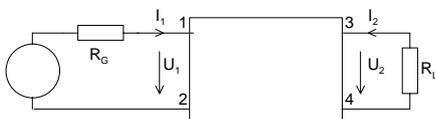


Bild 3-15: Schaltbild mit Konventionen zu **Tab. 3.7**.

3.9 Spezielle Vierpole

Spezielle Vierpole sind Vierpole mit speziellen Übertragungseigenschaften. Unter Kenntnis dieser Eigenschaften können gewisse Aufgabenstellungen vereinfacht werden.

3.9.1 Symmetrische Vierpole

Symmetrische Vierpole zeigen gleiches Übertragungsverhalten im Vorwärts- und Rückwärtsbetrieb. Dies äussert sich auch dadurch, dass Ein- und Ausgangswiderstand gleich sind.

Mathematisch erkennt man die symmetrischen Vierpole, dass die Parametermatrizen eine der Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= A_{22} \\
 \det G &= 1 \\
 \det H &= 1 \\
 Z_{11} &= Z_{22}
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

In der Praxis zeigen sich symmetrische Vierpole als symmetrische T- oder Π -Glieder. Deshalb können symmetrische Vierpole auch mit einem T- oder Π -Ersatznetzwerk nach Bild 3-16 dargestellt werden.

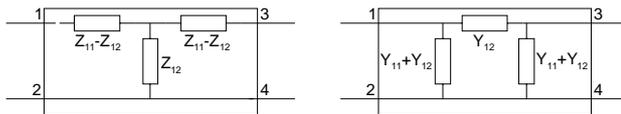


Bild 3-16: Symmetrische Vierpole.
 Jeder symmetrische Vierpol kann als T- oder Π -Netzwerk mit gezeigten Elementwerten beschrieben werden.

3.9.2 Übertragungssymmetrische (umkehrbare) Vierpole

Wird mit der gleichen Stromquelle ein Vierpol im einmal Vorwärtsbetrieb und einmal im Rückwärtsbetrieb gespeist und ergeben sich in beiden Fällen dieselbe Ausgangsspannung $U_2=U_1$, so ist der Vierpol umkehrbar:

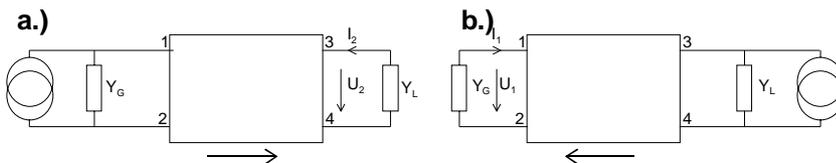


Bild 3-17: Übertragungssymmetrische Vierpole.
 Sie haben im Vor- und Rückwärtsbetrieb dieselben Ausgangsspannungen.

Mathematisch äussert sich die Übertragungssymmetrie in der Symmetrie der Transferkomponenten in den Parametermatrizen. So herrscht Übertragungssymmetrie, wenn einer der folgenden Fälle erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
 Z_{12} &= Z_{21} \\
 H_{12} &= -H_{21} \\
 G_{12} &= -G_{21} \\
 \det A &= 1
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

3.9.3 Rückwirkungsfreie (unilaterale) Vierpole

Beim rückwirkungsfreien Vierpol wird eine Änderung der Ausgangsgröße nicht auf den Eingang übertragen. Daher ist auch kein Rückwärtsbetrieb möglich.

Wird Rückwirkungsfreiheit angenommen, vereinfachen sich in der Regel die Gleichungen erheblich. In der Praxis gibt es praktisch keine Rückwirkungsfreiheit. Oft ist sie aber so klein, dass sie vernachlässigt werden kann.

Wenn Rückwirkungsfreiheit herrscht, werden die Rückwirkungskomponenten der Parametermatrizen null:

$$Z_{12} = G_{12} = H_{12} = \det A = 0 \quad (3.53)$$

3.10 Vierpol-Ersatzschaltungen

In vielen Fällen ist es nicht sinnvoll oder möglich eine komplexe Schaltung oder Bauelement direkt mit den Einzelteilen zu modellieren. Man behilft sich mit der Darstellung eines Parameter-Ersatzschaltbildes. Es beinhaltet alle wesentlichen Größen um das Übertragungsverhalten des Vierpols zu beschreiben.

Ein typisches Beispiel hierzu ist das H-Parametermodell für einen Transistor. Hierbei werden die einzelnen Parameter durch Messung bestimmt und so die H-Parametermatrix erstellt.

Prinzipiell kann also jeder Vierpol, dessen Parametermatrix bekannt ist, mit einem Parameterersatzschaltbild dargestellt werden, ungeachtet dessen, was der Vierpol tatsächlich beinhaltet.

Je nachdem, ob G-, H-, Y-, oder Z-Parameter verwendet werden, benutzt man ein eigenes, aber strukturell gleiches Ersatzschaltbild. Das Übertragungsverhalten wird in allen Fällen mit zwei gesteuerten Quellen modelliert:

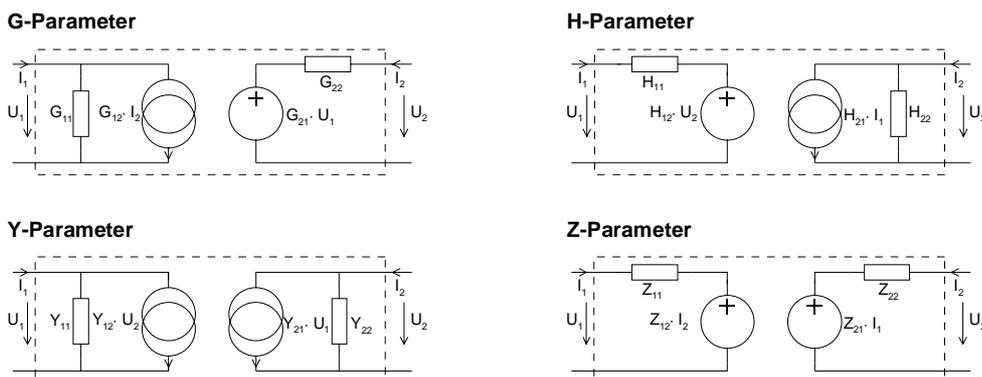


Bild 3-18: Vierpol-Ersatzschaltbilder
 Jeder Vierpol, dessen Parameter bekannt sind, kann mit einem Ersatzschaltbild substituiert werden.

3.11 Literaturverzeichnis

- [WEI93] Elektrotechnik für Ingenieure 3, Wilfried Weissgerber, Vieweg Verlag 1993, ISBN 3-528-14918-3
- [NOD56] Mathematics for Electronics, Henry M. Nodelman, McGraw-Hill 1956

3.12 Aufgaben

1. Wie gross ist minimale Dämpfung des Pi-Gliedes unter Berücksichtigung der Impedanzvorgaben?

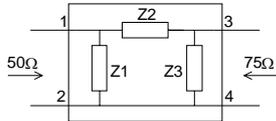
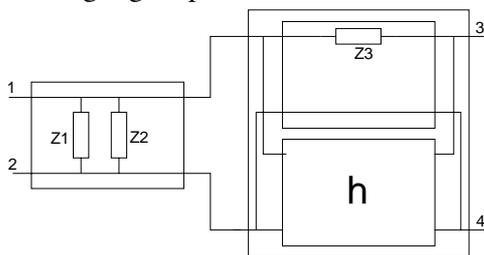


Bild 3-19: 50-75Ω Pi-Dämpfungsglied.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Netzwerk-Parameterrechnung aus der folgenden Zusammenschaltung:

- a.) die ABCD-Parametermatrix.
b.) die Eingangsimpedanz Z_{in} .



$$h = \begin{pmatrix} 4500\Omega & 2 \cdot 10^{-4} \\ 300 & 20 \cdot 10^{-6} S \end{pmatrix}$$

$$Z1 = 47k\Omega$$

$$Z2 = 18k\Omega$$

$$Z3 = 2.2k\Omega$$

Bild 3-20: Zusammenschaltung zu Aufgabe 2.

3. Zeigen Sie mit einer Matrizenrechnung oder mit einem direkten Ansatz der Definitionsgleichungen, dass für den folgenden Vierpol in Bild 3-21, dass

$$\text{gilt } Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_1 - Z_2 \\ Z_1 - Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}.$$

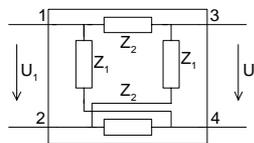
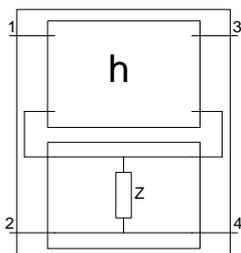


Bild 3-21: Aufgabe 3, Brückennetzwerk.

4. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Netzwerk-Parameterrechnung die H-Parameter der folgenden Schaltung:



$$h = \begin{pmatrix} 4500\Omega & 2 \cdot 10^{-4} \\ 300 & 20 \cdot 10^{-6} S \end{pmatrix}$$

$$Z = 150\Omega$$

Bild 3-22: Zusammenschaltung zu Aufgabe 4.

5. Verkettete Vierpole:

- a.) Bestimmen Sie die ABCD-Matrix der verketteten Vierpole.
b.) Wie gross wird die Spannung U_2 wenn $U_1=1V_{ss}$ beträgt?
Hinweis: Bestimmen Sie U_2 über das v_u der Schaltung.

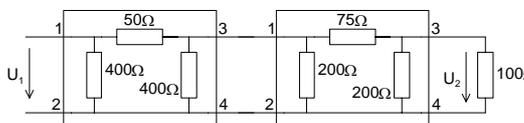


Bild 3-23: Zusammenschaltung zu Aufgabe 5.

6. Bestimmen Sie die ABCD-Parameter des folgenden Vierpoles. Brüche sind, soweit möglich, wegzuschaffen.

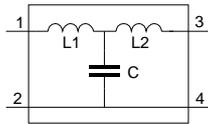


Bild 3-24: T-Netzwerk zu Aufgabe 6.

7. Π -Filter werden unter anderem für transformatorische Resonanzkreise in Sendern benutzt. Zeigen Sie:

a.) Die Impedanz ist $Z_{in} = R$, wenn $\omega L = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = R$.

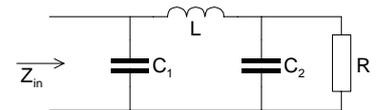


Bild 3-25: Aufgabe 7, Pi-Filter.

- b.) Die Eingangsimpedanz bei $\pm 10\%$ Verschiebung von der Resonanzfrequenz.

8. Ein 75 μ s-Preemphasisnetzwerk nach Bild 3-26l wird in einem FM-Modulator verwendet. Zeigen Sie mit Hilfe einer Vierpolrechnung, dass das Netzwerk der normierten Preemphasiskurve nach Bild 3-26r genügt-

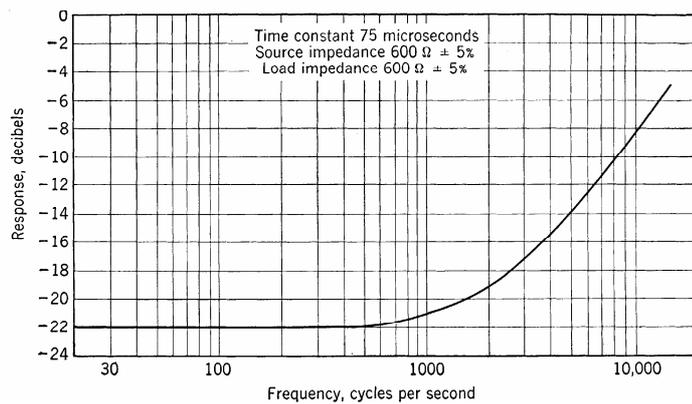
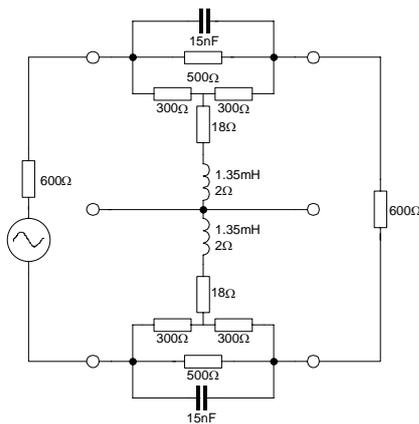


Bild 3-26: Aufgabe 8, 75 μ s Preemphasisnetzwerk.

Links.) Detailschaltbild Rechts.) Amplitudengang nach IEC.

9. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Knoten-/Maschenansatz die ABCD-Parameter des T-Gliedes:

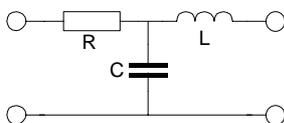


Bild 3-27: Aufgabe 9, Analyse T-Glied.

10. Bestimmen Sie für beide Vierpole in Bild 3-28:

- a.) Die ABCD-Parameter.

- b.) Die Parameter K, T_p, T_2 so dass das v_u ohne Last in der Form $v_u = \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T_2} K$ notiert werden kann.

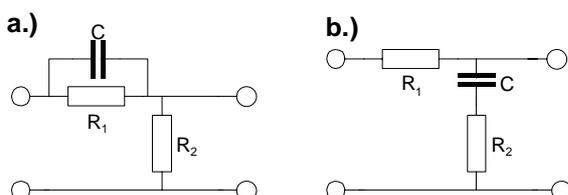


Bild 3-28: Vierpole zu Aufgabe 6.

- a.) Differenzierglied
b.) Integrierglied