

# Inverse Tschebyscheff Tiefpassfilter

Inverse Tschebyscheff-Tiefpassfilter (Tschebyscheff Typ-2) werden dort verwendet wo eine hohe Flankensteilheit bei maximal flachem Amplitudengang im Durchlassbereich gefordert wird. Inkauf genommen wird aber eine gleichmässige Welligkeit im Sperrbereich. Der Schaltungsaufwand ist wegen der Implementierung der Nullstellen der Übertragungsfunktion deutlich grösser als bei den herkömmlichen Tschebyscheff-Filtern (Tschebyscheff Typ-1).

## Grundlagen

Das inverse Tschebyscheff-Filter lässt sich durch zweimalige Transformation aus dem Tschebyscheff-Typ 1-Filter ableiten. Aus dem Amplitudengang des Typ-1 Filters der Ordnung  $n$  folgt der Amplitudengang. Der Einfachheit wegen wird mit quadrierten Grössen gearbeitet:

$$|A_{T1n}(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)} \quad (1)$$

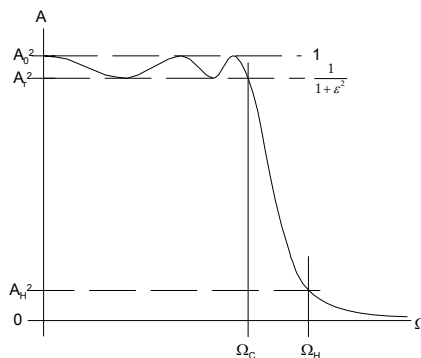


Bild 1: Quadrierter Amplitudengang eines Tschebyscheff-Typ-1 Tiefpass, gezeigt am Beispiel  $n=5$ .

Die Welligkeit im Durchlassbereich wird aus den bekannten Gleichungen bestimmt:

$$A_r = \sqrt{10^{0.1 A_{rdB}} - 1} \quad \rightarrow \quad A_r^2 = 10^{0.1 A_{rdB}} - 1 = |A(\Omega)|^2_{\Omega=1} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (2)$$

Durch Subtraktion wird eine Hochpasscharakteristik erzeugt:

$$1 - |A_{T1n}(\Omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)} = \frac{\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)} \quad (3)$$

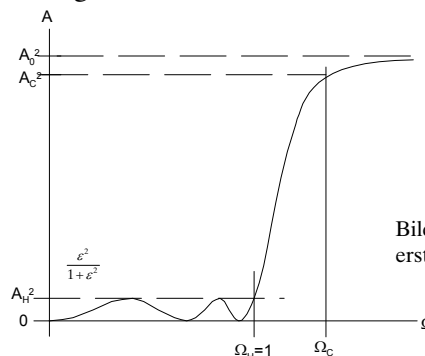


Bild 2: Amplitudengang nach dem ersten Transformationsschritt.

Durch Spiegelung bei  $\Omega = 1$  wird die Tiefpasscharakteristik des Tschebyscheff-Typ 2 erreicht.

$$\Omega'_C = \frac{1}{\Omega_C} \quad (4)$$

$$|A_{T2n}(\Omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{1}{\Omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{1}{\Omega}\right)}$$

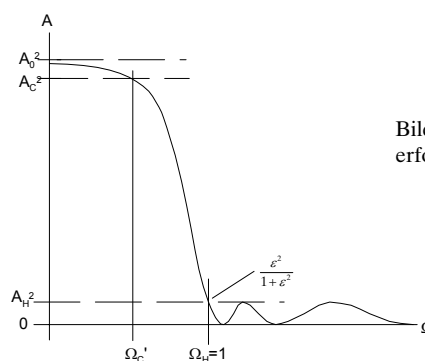


Bild 3: Typ-2 -Amplitudengang nach erfolgter zweiter Transformation.

$\Omega = 1$  bezeichnet nun das Ende des Sperrbereiches also  $\Omega_H$ :

$$\left| A_{T_{2n}}(\Omega) \right|_{\Omega=1}^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} = A_H^2 \quad (5)$$

Der Amplitudengang des Tschebyscheff Typ-2 wird daher aus (4):

$$A_{T_{2n}}(\Omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{1}{\Omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{1}{\Omega}\right)}} \quad (6)$$

Aus der Entwicklung erkennt man sofort, dass das Tschebyscheff Typ-2 Filter auf Spezifikationen des Sperrbereiches beruht. Somit kann das Typ-2 Filter nicht direkt auf eine geforderte Dämpfung  $A_C$  bei der Durchlassgrenzfrequenz  $\Omega_C$  dimensioniert werden. Dies stellt aber in der Praxis keine nennenswerte Einschränkung dar.

Mittels Untersuchung von  $T_n(\Omega)$  im Sperrbereich findet man mit Hyperbelfunktionen die Durchlassgrenzfrequenz  $\Omega'_C$  für eine geforderte Dämpfung  $A_C$  bei gegebenem Welligkeitsfaktor  $\varepsilon$  und Filterordnung  $n$ :

$$\Omega'_C = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{\sqrt{1 - A_C^2}}{\varepsilon}\right)}{n}\right)} \quad (7)$$

Soll eine Dimensionierung bezüglich der Durchlassgrenzfrequenz  $\Omega_C$  erfolgen, muss die Sperrfrequenz  $\Omega_H$  als Grundlage zur Rechnung aus der Durchlassgrenzfrequenz gebildet werden. Dies wird durch Multiplikation mit dem Faktor  $k$  erreicht. Die zur realisierende Sperrfrequenz wird:

$$\begin{aligned} \Omega_H &= k \cdot \Omega_C && \Rightarrow f_H = k \cdot f_C && (8) \\ k &= \cosh\left(\frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{\sqrt{1 - A_C^2}}{\varepsilon}\right)}{n}\right) \\ &= \cosh\left(\frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{\sqrt{10^{0.1 \cdot A_{CdB}} - 1}}{\varepsilon}\right)}{n}\right) && A_{CdB} : \text{Dämpfung bei } f_C \text{ in dB als positiver Wert} && (9) \end{aligned}$$

Der Faktor  $k$  verschiebt die Sperrfrequenz  $\Omega_H$  so, dass bei der Durchlassgrenzfrequenz  $\Omega_C$  genau die geforderte Dämpfung  $A_C$  erreicht wird. Als Folge wird die Sperrdämpfung  $A_H$  bei der Sperrfrequenz  $\Omega_H$  erhöht.

Die so erhaltene Dimensionierungsperrfrequenz  $\Omega_H(f_H)$  wird dann zur Synthese nach (11)-(15) verwendet.

## Welligkeitsfaktor

Aus (5) kann durch Umstellung der Welligkeitsfaktor  $\varepsilon$  direkt bestimmt werden:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{A_H^2}{1 - A_H^2}} = \frac{1}{\sqrt{10^{0.1A_{HdB}} - 1}} \quad A_{HdB} : \text{Welligkeit im Sperrbereich in dB als positiver Wert} \quad (10)$$

Man beachte die Welligkeit  $\varepsilon$  beim Typ-2 Filter. Sie beschreibt das Verhalten im Sperrbereich und ist daher nicht gleich wie beim Typ-1 Filter.

## Lage der Pole und Nullstellen

Im Nenner von (4) erkennt man, dass praktisch kein Unterschied zum Typ-1 besteht ausser, dass die Pole invers liegen. Die Nullstellen sind die Nullstellen des Tschebyscheffpolynoms  $T_n(\Omega)$ . Daher gilt für die Pole und Nullstellen:

$$S_{PTyp2} = \left[ -\sin\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \right]^{-1} \quad \begin{array}{l} n : \text{Filterordnung} \\ k : 0 \dots n-1 \end{array} \quad (11)$$

$$S_N = \frac{j}{\cos\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right)} \quad (12)$$

Durch die Inversion folgt für quadratische Glieder, dass die Polfrequenz  $\Omega_p$  im Vergleich zum Tschebyscheff Typ-1 ebenfalls invertiert erscheint, die Polgüte  $Q_p$  hingegen bleibt gleich.

$$\Omega_{PTyp2} = |S_{PTyp2}| = \frac{1}{\Omega_{PTyp1}} \quad Q_{PTyp2} = Q_{PTyp1} \quad \text{mit: } Q_p = \frac{-\Omega_p}{2 \operatorname{Re}(S_p)} \quad (13)$$

Die Entnormierung erfolgt bezüglich der Sperrfrequenz  $f_H$  wo die Welligkeit im Sperrbereich überschritten wird:

$$\omega_p = 2\pi f_H \Omega_p \quad \omega_z = 2\pi f_H \Omega_z \quad (14)$$

Wenn bezüglich Durchlassspezifikationen wo die die Amplitude bei der Frequenz  $f_c$  erstmals den Wert  $A_c$  unterschreitet erfolgt die Entnormierung mit (8),(9):

$$\omega_p = 2\pi f_c \Omega_p k \quad \omega_z = 2\pi f_c \Omega_z k \quad (15)$$

Die minimal notwendige Filterordnung ist hingegen bei beiden Tschebyscheff-Typen gleich. Es gilt:

$$n \geq \frac{\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{\frac{10^{\frac{A_{HdB}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{c dB}}{10}} - 1}}\right)}{\operatorname{arcosh}(\Omega_c)} = \frac{\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{\frac{10^{\frac{A_{HdB}}{10}} - 1}{\varepsilon^2}}\right)}{\operatorname{arcosh}(\Omega_c)} \quad \begin{array}{l} A_{HdB} : \text{Sperrdämpfung in dB bei } f_H \text{ (als positiver Wert)} \\ A_{c dB} : \text{Dämpfung bei Grenzfrequenz } f_c \text{ in dB} \\ \Omega_H : \frac{f_H}{f_c} \end{array} \quad (16)$$

## Zusammenfassung

Gezeigt wurde die Herleitung und Berechnung der Pole/Nullstellen inverser Tschebyscheff-Tiefpässe basierend auf der Grundlage herkömmlicher Tschebyscheff-Tiefpässe. Inverse Tschebyscheff-Filter werden dort eingesetzt, wo maximal flacher Amplitudengang mit zulässiger Welligkeit im Sperrbereich gefordert wird. Die Berechnung ist an sich nicht wesentlich aufwändiger als herkömmliche Tschebyscheff-Filter, die Implementierung aber wegen der Nullstellen der Übertragungsfunktion hingegen schon. Passive Filter benötigen LC-Resonanzkreise, aktive Filter arbeiten häufig mit Brücken-T-Rückführungen.

## Ausblick

Die Bestimmung des -3.01dB Punktes und der erreichten Sperrdämpfung wenn bezüglich Durchlassgrenzfrequenz dimensioniert wurde, wären eine sinnvolle Ergänzung des Formelsatzes. Diese Herleitungen sind an sich unkompliziert. Zum grundsätzlichen Vorgehen möchte ich auf die Ausführungen in [KRU01-1] verweisen.

## Notation

$\Omega_P, \Omega_Z$ :	Normierte Pol-/Nullstellenfrequenzen, d.h. $f_C = \frac{1}{2\pi} Hz$
$\omega_P, \omega_Z$ :	Entnormierte Pol-/Nullstellenfrequenzen in rad/s, $\omega_P = 2\pi f_C \Omega_P, \omega_Z = 2\pi f_C \Omega_Z$
$\varepsilon$ :	Welligkeitsfaktor
$A_H, A_H$ :	Dämpfung bei Durchlass-/ Sperrfrequenz in absoluten Grössen
$A_{CdB}, A_{HdB}$ :	Dämpfung bei Durchlass-/ Sperrfrequenz in dB (Werte immer positiv)
$f_C, f_H$ :	Durchlass-/ Sperrgrenzfrequenzen in Hz
$T_n(\Omega)$ :	Tschebyscheff-Polynom des Grades $n$

## Beispiele

**Beispiel 1:** PN-Diagramm eines Tschebyscheff Typ-2 Filters.

Zu zeigen ist PN-Diagramm eines normierten inversen Tschebyscheff-Tiefpass der Ordnung 5 und minimaler Sperrdämpfung von 30dB.

### Lösung:

Die Berechnung erfolgt direkt mit (10) und (11). Die numerische Rechnung und Grafik erfolgt mit MathCad.

#### Vorgaben:

$$A_{\text{HdB}} := 30 \quad n := 5$$

#### Berechnung:

Pole, Nullstellen normierter inverser Tschebyscheff-Tiefpässe:

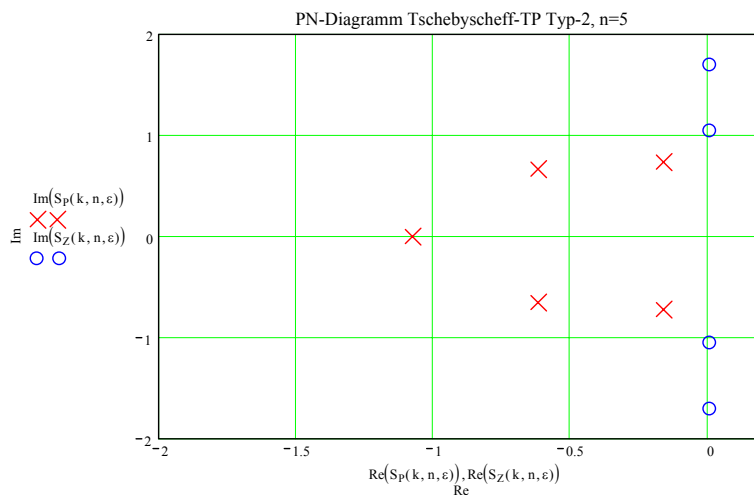
$$\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_{\text{HdB}}}{10}} - 1}} \quad \varepsilon = 0.031639$$

$$S_p(k, n, \varepsilon) := \frac{1}{-\sin\left(\frac{1+2 \cdot k}{2 \cdot n} \cdot \pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + i \cdot \cos\left(\frac{1+2 \cdot k}{2 \cdot n} \cdot \pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)}$$

$$S_z(k, n, \varepsilon) := \frac{i}{\cos\left(\frac{1+2 \cdot k}{2 \cdot n} \cdot \pi\right)}$$

$$k := 0..n-1$$

$S_p(k, n, \varepsilon) =$	$S_z(k, n, \varepsilon) =$
62-0.735i	1.051i
22-0.665i	1.701i
-1.078	33i·10 <sup>16</sup> <- Nullstelle bei unendlich
22+0.665i	-1.701i
62+0.735i	-1.051i



**Beispiel 2:** Inverser Tschebyscheff Tiefpass 4. Ordnung.

Man dimensioniere einen inversen Tschebyscheff-Tiefpass 4. Ordnung als aktives Filter mit den Anforderungen  $A_0=1\text{dB}$ ,  $f_c=1\text{kHz}$ ,  $A_c=1\text{dB}$ ,  $A_H=40\text{dB}$ . Die Schaltung ist als Kaskade zweier quadratischer Glieder mit der Schaltung nach Boctor zu realisieren. Die wählbaren Komponenten sind mit  $10\text{k}\Omega$  resp.  $1\text{nF}$  einzusetzen. Weitere Kondensatoren sind aus der E6-Reihe zu wählen.

**Lösung**

Zuerst werden die normierten Pol-/ Nullstellenfrequenzen für  $n=4$  und  $A_H=40\text{dB}$  gemäss (11)-(13) berechnet:

**Vorgaben:**

$$f_c := 1\text{kHz} \quad A_{0\text{dB}} := 0 \quad A_{\text{HdB}} := 40 \quad n := 4 \quad A_{\text{CdB}} := 2$$

$$R := 10\text{k}\Omega \quad C := 1\text{nF} \quad (\text{wählbare Elementwerte})$$

**Berechnung Polfrequenzen, Nullfrequenzen und Polgüten:**

$$\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{10^{\frac{0.1 \cdot A_{\text{HdB}}}{2}} - 1}} \quad \varepsilon = 0.010001$$

$$k := 0..n-1 \quad \text{Indizes für Pole}$$

$$S_{p_k} := \frac{1}{-\sin\left(\frac{1+2k}{2n} \cdot \pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + i \cdot \cos\left(\frac{1+2k}{2n} \cdot \pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)}$$

$$S_{z_k} := \frac{i}{\cos\left(\frac{1+2k}{2n} \cdot \pi\right)} \quad S_Z = \begin{pmatrix} 1.082i \\ 2.613i \\ -2.613i \\ -1.082i \end{pmatrix} \quad S_P = \begin{pmatrix} -0.171 - 0.476i \\ -0.505 - 0.241i \\ -0.505 + 0.241i \\ -0.171 + 0.476i \end{pmatrix}$$

$$i := 0.. \frac{n-1}{2} \quad \text{Index der quadratischen Teilfilter}$$

$$\Omega_{P_i} := |S_{P_i}| \quad \Omega_P = \begin{pmatrix} 0.506 \\ 0.559 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{Z_i} := |S_{Z_i}| \quad \Omega_Z = \begin{pmatrix} 1.082 \\ 2.613 \end{pmatrix}$$

$$Q_{P_i} := \frac{-|S_{P_i}|}{2 \cdot \text{Re}(S_{P_i})} \quad Q_P = \begin{pmatrix} 1.478 \\ 0.554 \end{pmatrix}$$

Wir wählen  $C_s$  und  $R_7$  als frei wählbare Elemente und ordnen die Vorgabewerte zu. Da eine Sperrforderung bezüglich der Durchlassgrenzfrequenz vorliegt, werden mit Hilfe des Faktors  $k$  nach (9) die entnormierten Dimensionierungssperrfrequenzen  $\omega_H$  und -Nullstellenfrequenzen  $\omega_Z$  bestimmt. Mit den Polgüten  $Q_p$  bilden sie die Grundlage für die Berechnung der Elementwerte der aktiven Boctor-Teilfilter. Die minimal zulässigen Kondensatoren  $C_l$  werden nach [KRU02-1]:

Boctor-Tiefpass-Stufen berechnen:

Wählbare Werte zuordnen:

$$C_{g_i} := C \quad R_{7_i} := R$$

$$k := \cosh \left( \frac{\operatorname{arccosh} \left( \frac{\sqrt{\frac{10^{-0.1 \cdot A_{\text{CdB}}}}{1 - 10^{-0.1 \cdot A_{\text{CdB}}}}}}{\epsilon} \right)}{n} \right) \quad k = 2.13499 \times 10^0$$

Entnormierte Pol-/Nullstellenkreisfrequenzen bestimmen

$$\omega_P := \overrightarrow{(2\pi \cdot f_C \cdot \Omega_P \cdot k)} \quad \omega_Z := \overrightarrow{(2\pi \cdot f_C \cdot \Omega_Z \cdot k)} \quad \omega_P = \begin{pmatrix} 6.78686 \times 10^3 \\ 7.49939 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{ Hz} \quad \omega_Z = \begin{pmatrix} 14.51976 \times 10^3 \\ 35.0538 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{ Hz}$$

$$C_{1\text{min}} := \frac{C_8 \cdot A_0^2 \cdot [Q_P^2 \cdot (\omega_Z^2 - \omega_P^2) + \omega_P^2]^2}{\omega_Z^4 \cdot Q_P^2 \cdot (A_0 - 1) + \omega_Z^2 \cdot \omega_P^2 \cdot Q_P^2 \cdot (A_0^2 - A_0) + \omega_P^2 \cdot A_0 \cdot (\omega_Z^2 - A_0 \cdot \omega_P^2)} \quad C_{1\text{min}} = \begin{pmatrix} 21.716 \times 10^{-9} \\ 2.626 \times 10^{-9} \end{pmatrix} \text{ F}$$

Nächstgrösseren Normwert für C1 wählen:  $C_1 := \begin{pmatrix} 33\text{nF} \\ 3.3\text{nF} \end{pmatrix}$

Die Widerstände ergeben sich nach [KRU02-1]:

Berechnung der Widerstände:

$$R_4 := \frac{\overrightarrow{R_7 \cdot (\omega_Z^2 - A_0 \cdot \omega_P^2)}}{\omega_P^2 \cdot A_0} \quad R_4 = \begin{pmatrix} 35.770083 \times 10^3 \\ 208.483325 \times 10^3 \end{pmatrix} \Omega$$

$$D := \overrightarrow{[C_1^2 \cdot \omega_Z^4 - 4 \cdot C_1 \cdot C_8 \cdot A_0^2 \cdot \omega_P^2 \cdot (\omega_P^2 + Q_P^2 \cdot \omega_Z^2)]} \quad D = \begin{pmatrix} 45.322239 \\ 16.120772 \end{pmatrix} \frac{\text{s}^4 \text{A}^4}{\text{kg}^2 \text{m}^4} \quad (\text{Hilfsgrösse})$$

$$R_2 := \frac{\overrightarrow{C_1 \cdot \omega_Z^2 - \sqrt{D}}}{2 \cdot C_1 \cdot C_8 \cdot A_0 \cdot Q_P \cdot \omega_P^3} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 7.378363 \times 10^3 \\ 25.851907 \times 10^3 \end{pmatrix} \Omega$$

$$R_3 := \frac{\overrightarrow{1}}{C_1 \cdot C_8 \cdot R_2 \cdot \omega_P^2} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 89.163864 \times 10^3 \\ 208.421018 \times 10^3 \end{pmatrix} \Omega$$

$$R_5 := \frac{\overrightarrow{-Q_P \cdot R_2}}{Q_P + R_2^2 \cdot C_1 \cdot C_8 \cdot Q_P \cdot \omega_P^2 - R_2 \cdot C_1 \cdot \omega_P} \quad R_5 = \begin{pmatrix} 208.7166 \times 10^3 \\ 840.5311 \times 10^3 \end{pmatrix} \Omega$$

$$R_6 := \frac{\overrightarrow{R_7 \cdot Q_P}}{C_8 \cdot \omega_P \cdot (R_2 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot Q_P \cdot \omega_P - R_7)} \quad R_6 = \begin{pmatrix} 28.149 \times 10^3 \\ 11.5615 \times 10^3 \end{pmatrix} \Omega$$

$$R_{7_i} := R_7 \quad R_7 = \begin{pmatrix} 10 \times 10^3 \\ 10 \times 10^3 \end{pmatrix} \Omega$$

In der Rechnung verkörpern die Elemente in der ersten Zeile der Vektoren diejenigen Werte des Teilfilters mit der höheren Polgüte ( $Q_p=1.478$ ). Nach gängiger Lehre wird es dem Teilfilter mit der niedrigeren Polgüte nachgeschaltet. Die Problematik der austuerungsoptimalen Pol-/Nullstellenpaarung wurde hier nicht näher betrachtet (siehe hierzu auch [SCH01]).

Eine Simulation mit PSpice bestätigt die Dimensionierung mit vernachlässigbar kleinen Abweichungen. Für eine praktische Implementierung Normwiderständen wäre es ev. günstiger das Teilfilter mit der grösseren Güte mit einer höheren Anfangsverstärkung (z.B. 2) zu betreiben und diesen Fehler vorgängig oder nachfolgend mit einem Spannungsteiler zu korrigieren.

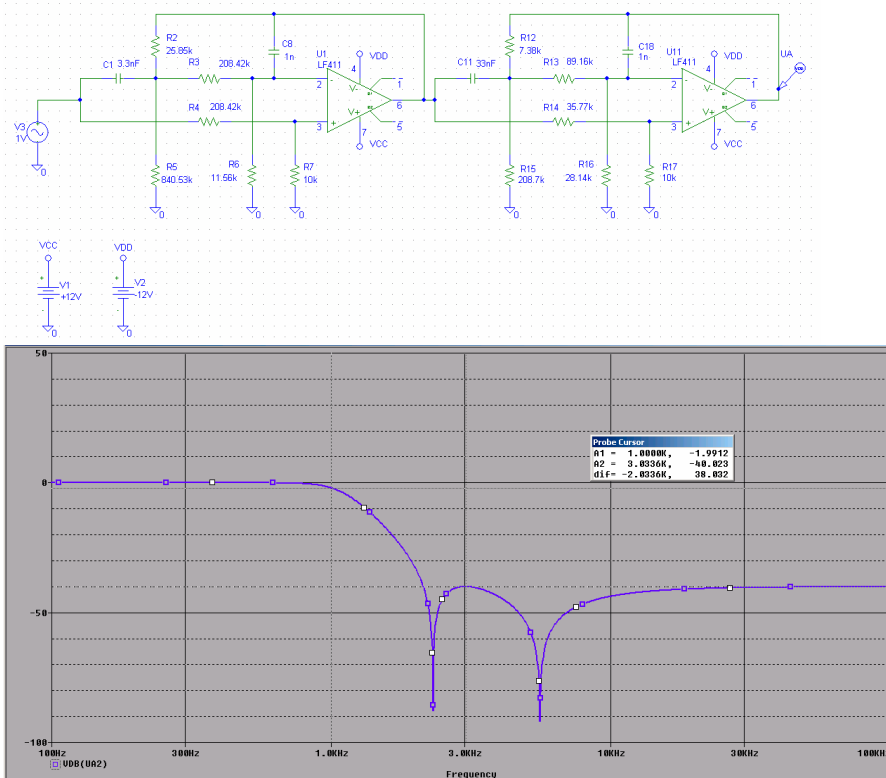


Bild 4: Detailschema der Lösung zum inversen Tschebyscheff-Tiefpass 4. Ordnung nach Beispiel 2.

## Literatur

Referenziert:

- [KRU01-1] Skript Elektronik, Kapitel 3, G. Krucker Ausgabe 2001, Download von <http://www.krucker.ch/DiverseDok/Papers.html>
- [KRU02-1] Aktives elliptisches TP-Glied zweiter Ordnung nach Boctor, G. Krucker 2002, Download von <http://www.krucker.ch/DiverseDok/Papers.html>
- [SCH01] Design of Analog Filters, R. Schaumann/ M. E. van Valkenburg, Oxford University Press 2001, ISBN 0-19-511877-4

Weiterführend oder ergänzend:

- [DAN74] Approximation Methods for Electronic Filter Design, R. Daniels, Mc Graw Hill 1974, ISBN0-07-01308-6
- [ELL94] Electronic Filter Analysis and Design, Michael G. Ellis Sr., Artech House 1994 ISBN 0-890006-616-7
- [HER84] Aktive RC-Filter, M. Herpy/ J. Berka, Franzis Verlag 1984, ISBN 3-7723-7011-X
- [ZVE67] Handbook of Filter Synthesis, A. Zverev, John Wiley & Sons 1967, ISBN 0-461-98680-1